Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde

$$y^m = R(x)$$

gehörigen Abelschen Functionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Erlangen

vorgelegt von

William Fogg Osgood
aus Boston.

Göttingen 1890.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kästner).

Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde

$$y^m = R(x)$$

gehörigen Abelschen Functionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Erlangen

vorgelegt von

William Fogg Osgood

aus Boston.

Göttingen 1890.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei

(W. Fr. Kästner).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0167

Einleitung.

In seinen Vorlesungen über Abelsche Functionen (s. Annalen, Bd. 36) hat Herr Klein eine Reihe neuer Gesichtspunkte in die Theorie eingeführt, unter welchen der einer ausgezeichneten invarianten Darstellung der Integrale III. Gattung und infolgedessen der im weiteren Verlauf der Theorie in Betracht zu ziehenden Functionen (Primformen, Σ-Functionen u. s. w.) den wesentlichsten bildet. Nachdem nämlich bereits für gewisse Klassen von Abelschen Functionen, insbesondere für die hyperelliptischen und die Functionen auf einer singularitätenfreien ebenen Curve eine solche Darstellung gegeben war (Klein, Ann. 27; Pick, Ann. 29), hat Herr Klein die Frage aufgeworfen und beantwortet, ob es nicht auch für den allgemeinen Abelschen Fall Riemannsche Flächen existieren, auf denen die bewussten Functionen ebenfalls zu der geforderten Art von invarianter Darstellung gelangen. In der That zeigt sich, dass die von ihm eingeführte canonische Riemannsche Fläche (Klein: *z. Th. d. Abelschen Funct.*, 1. Mitt., Gött. Nachr. 1889) diese Eigenschaft besitzt. Dieselbe besteht aus einer solchen m-blättrigen Fläche, für welche die Function x^d, wo x die Variable der Fläche und $md = 2p-2$, in $2p-2$ durch eine adjungierte Curve φ verknüpften Punkten unendlich wird, eine Fläche, auf welcher zunächst die Integrale I. Gattung eine einfache Gestalt erhalten (vgl. unten § 2).

Im Anschluss an diese Arbeiten von Herrn Klein beabsichtige ich einen neuen Fall, nämlich diejenigen speciellen Klassen von Abelschen Functionen, welche der Gleichungsform $y^m = R(x)$ angehören, und zugleich zu canonischen Flächen und binärer invarianter Darstellung führen, einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Von derselben lege ich hier zwei in sich abgeschlossene Teile vor. Im ersteren Teile werden zunächst diejenigen in jener Gleichung enthaltenen Formen ausgeschieden, für welche die x-Fläche canonisch wird. Weiter werden dann für den Fall, dass R eine ganze Function mn-ten Grades mit lauter verschiedenen Factoren ist, die Verzweigungsform und die hier verlangte invariante Form des Integrals III. Gattung sowie der Reductionsformel eines Integrals II. Gattung auf p vorgegebene solche Integrale und eine algebraische Function gegeben.

Im zweiten Teile habe ich für eine specielle dieser canonischen Flächen, nämlich die für $y^3 = f_6(x)$ $(p = 4)$ das sogenannte specielle Zweiteilungsproblem behandelt. Diese Curve mit der Eigenschaft, dass eine gerade ϑ-Function für die Nullwerte der Argumente identisch verschwindet, hat, wie alle unsere obigen Curven die weitere ausgezeichnete Eigenschaft, einen Cyclus von eindeutigen Transformationen in sich selbst zuzulassen. Infolgedessen wird das specielle Zweiteilungsproblem (§ 7) gruppen- und invariantentheoretisch identisch mit dem von Clebsch (Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 14) behandelten speciellen Dreiteilungsproblem für $p = 2$. Die gruppentheoretischen Eigenschaften dieses Problems, welche Clebsch auf rein algebraischem Wege ermittelt hat, habe ich durch die Anwendung der Characteristikentheorie für $p = 4$ auf vorliegenden Fall wieder gefunden. In dieser Characteristikentheorie und in ihrer geometrischen Deutung auf Berührungscurven habe ich mich an Herrn Noether (Ann. 28 und 17) angelehnt.

Betreffs der Literatur habe ich noch zu bemerken, dass über die binomischen Integrale bereits folgende Arbeiten erschienen sind: Netto: *de transf. aeq.* $y^n = R(x)$ *in aeq.* $\eta_1^2 = R_1(\xi)$, Inaug. Diss., Berlin 1870; Thomae: *über eine specielle Klasse Abelscher Funct.*, Halle 1877; Pick und Ungar: *Grundzüge von einer Theorie einer Klasse Abelscher Int.*, Ber. d. Wiener Ak., Bd. 82, 1880; Pick: *zur Theorie der binomischen Integrale*, ibid. Bd. 94. Von denselben verfolgen die 3 ersteren ganz andere Richtungen; nur in der letzten Arbeit von Pick ist der Ausdruck für den Integranden II. Gattung im allgemeinen Falle der binomischen Gleichung auf Polarenbildung zurückgeführt, was im vorliegenden Falle mit unserer invarianten Darstellung desselben identisch wird.

Dem Verfasser ist es eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Noether in Erlangen für seine fördernde Anregung bei Abfassung dieser Arbeit seinen besten Dank auszusprechen.

I.

§ 1.

Allgemeines über das algebraische Gebilde: $y^m = R(x)$.

Es sei das algebraische Gebilde, welches den Gegenstand dieser Untersuchungen bildet, durch die Gleichung

$$y^m = R(x),$$

wobei m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, definiert.

Setzt man

$$R(x) = \frac{G_q(x)}{G_r(x)}$$

wo G_q, G_r ganze Functionen resp. vom $q$ten und $r$ten Grade darstellen mögen, und führt man dann noch statt y und x homogene Variable ein, indem man

$$y = \frac{y'}{t}, \quad x = \frac{x'}{t},$$

setzt, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$y'^m G_r(x_g t) - t^{m+r-q} G_q(x_g t) = 0,$$

oder allgemeiner, vermöge einer Substitution

$$t = \alpha x' + \beta t',$$

und indem man wieder zu nicht homogenen Variablen zurückkehrt:

$$y^m G_r(x) - G_{m+r}(x) = 0,$$

wo $G_r(x)$, $G_{m+r}(x)$ beliebige ganze Functionen r-ten bez. $(m+r)$-ten Grades von x sind, welche nur auch x in diesem Grade wirklich enthalten sollen.

Es sollen jetzt die Verzweigungen von y als Function von x aufgezählt werden. Die Bedingung für eine solche Verzweigung ist bekanntlich:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y^m G_r(x) - G_{m+r}(x)\right\} = m y^{m-1} G_r(x) = 0,$$

also entweder $y = 0$, was auch das gleichzeitige Verschwinden von $G_{m+r}(x)$ erfordert, oder $G_r(x) = 0$; den Verzweigungen entsprechen sonach stets endliche Werte von x. Es sind also 2 Fälle zu untersuchen:

1) $G_{m+r}(x) = 0$. Nimmt man an, der Factor $x - a$ käme k-mal vor, und verlegt man zugleich den Anfangs-

punkt nach dem Punkte $x = a$, $y = 0$, so geht die Gleichung über in die folgende:

$$y^m G_r(x) - x^k G_{m+r-k}(x) = 0.$$

Diese Curve hat im Anfangspunkte einen mehrfachen Punkt.

Der wohlbekannten Theorie der singulären Punkte entnehme ich nun die Sätze, welche ich hier brauche:

a) Haben m und k keinen gemeinsamen Factor, so geht durch den Anfangspunkt ein einziger k- bez. m-elementiger Zweig der Curve, je nachdem $k < m$ oder $k > m$, der von der Geraden $x = 0$ in m Punkten getroffen wird. Auf die Riemannsche Fläche übertragen heisst dieser Satz: An dem Punkte $x = 0$ hängen sämmtliche m Blätter zusammen.

Einem solchen Factor, $(x - a)^k$, entsprechen sonach $m - 1$ einfache Verzweigungen.

b) Sind dagegen m und k nicht mehr relativ prim, besitzen sie vielmehr als grössten gemeinsamen Teiler die Zahl ρ:

$$m = \mu\rho, \qquad k = \varkappa\rho,$$

so gehen jetzt durch den Anfangspunkt ρ mehr- ($\varkappa$- bez. μ-) elementige Zweige, die von der Geraden, $x = 0$, je in μ Punkten getroffen werden. Functionentheoretisch ausgesprochen: Es hängen im Punkte $x = 0$ die m Blätter zu je μ zusammen.

Demzufolge ruft der Factor $(x - a)^k$ in diesem Falle $\rho(\mu - 1) = m - \rho$ einfache Verzweigungen hervor.

2) $G_r(x) = 0$. Für die Punkte auf der Curve, welche unter diesem Falle zu betrachten sind, gilt genau dasselbe, wie für den Fall 1), auf welchen dieser Fall durch die Substitution

$$y = \frac{1}{y'}$$

zurückkommt.

Hiernach lassen sich nun die Verzweigungen von y wirklich aufzählen. Sei

$$G_{m+r}(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \ldots\ldots (x-a_h)^{k_h}$$

und

$$G_r(x) = (x-a_1')^{k_1'}(x-a_2')^{k_2'} \ldots\ldots (x-a_{h'}')^{k_{h'}'}.$$

Es dürfen hier nur m, sämmtliche k und sämmtliche k' keinen gemeinsamen Teiler haben, damit das algebraische Gebilde nicht reducibel wird. Versteht man nun allgemein unter ρ_i die Anzahl der getrennten Zweige, die vom Punkte $y = 0$, $x = a_i$ bez. a_i' ausgehen, wodurch denn die Fälle *a*) und *b*) gleichzeitig umfasst werden, und bildet man dann $m - \rho_i$ für jeden Factor $(x-a_i)^{k_i}$ bez. $(x-a_i')^{k_i'}$, d. h. für jede Verzweigungsstelle, so wird die Anzahl der einfachen Verzweigungen die Summe aller solcher Ausdrücke:

$$\Sigma_i(m-\rho_i)$$

Von der Reihenentwicklung an einem Punkte, für welchen $G_{m+r}(x)$ bez. $G_r(x)$ verschwindet, gilt nun folgendes:

Für einen Punkt $x = a$, $y = 0$, hat man die Reihenentwicklung:

$$y = \alpha_1(x-a)^{\frac{\varkappa}{\mu}} + \alpha_2(x-a)^{\frac{\varkappa+1}{\mu}} + \alpha_3(x-a)^{\frac{\varkappa+2}{\mu}} + \ldots$$

Für einen Punkt $x = a'$, $y = \infty$, heisst dieselbe:

$$y = \alpha_1(x-a')^{-\frac{\varkappa}{\mu}} + \alpha_2(x-a')^{-\frac{\varkappa+1}{\mu}} + \alpha_3(x-a')^{-\frac{\varkappa+2}{\mu}} + \ldots$$

Hier hängen die α mit von einer ρ-ten Einheitswurzel ab, den ρ Zweigen durch den Punkt entsprechend. Eine solche Reihenentwicklung stellt ρ getrennte Entwicklungen dar, von welchen jede einen Cyclus von μ Entwicklungen umfasst.

Das Geschlecht p des algebraischen Gebildes werde ich durch die Riemannsche Formel

$$w = 2(m + p - 1)$$

einführen, worin m die Anzahl der Werte von y für $x =$ const. bedeutet, also durch

$$p = \frac{1}{2}\Sigma_i(m - \rho_i) - m + 1$$

Ferner werde ich das algebraische Gebilde vermöge einer einfachen Transformation in eine für die weiteren Untersuchungen geeignetere Gestalt bringen. Setzt man zunächst

$$\eta = y\, G_r(x),$$

so erhält man:

$$\eta^m - (G_r(x))^{m-1}\, G_{m+r}(x) = 0.$$

oder:

$$\eta_i^m - (G_i(x))^m\, G_{m(r+1)-mi}(x) = 0,$$

wo nun in $G_{m(r+1)-mi}(x)$ alle Factoren in niedrigerer als der m-ten Potenz vorkommen. Vermöge der weiteren Substitution:

$$\eta = y\, G_i(x)$$

erhält man dann die gewünschte Gleichungsform:

$$y^m - G_{m(\nu+1)}(x) = 0,$$

wo die ganze Function $m(\nu + 1)$-ten Grades $G_{m(\nu+1)}(x)$ nur für endliche Werte von x verschwindet.

§ 2.

Die canonische Fläche.

Die erste wesentliche Frage dieser Untersuchungen ist die: Welche unter den Flächen

$$y^m = G_{m(\nu+1)}(x)$$

sind canonisch in dem in der Einleitung citierten Sinne (vgl. unten)?

Schreibt man die Integranden I. Gattung in der Form

$$dw = \varphi \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad f \equiv y^m - G_{m(\nu+1)}(x) = 0,$$

so geschieht die Beantwortung der Frage mittelst Untersuchung dieser φ. Es sollen darum zunächst die Integrale I. Gattung aufgestellt werden. Sei vorläufig angenommen, dass alle Exponenten k in

$$G_{m(\nu+1)}(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_h)^{k_h}$$

gleich 1 seien, so überzeugt man sich leicht, dass folgende Integrale nirgends unendlich werden:

$$\int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x dx}{y}, \ldots \int \frac{x^{\nu-1} dx}{y}$$

$$\int \frac{dx}{y^2}, \quad \int \frac{x dx}{y^2}, \ldots \ldots \int \frac{x^{2\nu} dx}{y^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{y^j}, \quad \int \frac{x dx}{y^j}, \ldots \ldots \int \frac{x^{j(\nu+1)-2} dx}{y^j}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{y^{m-1}}, \quad \int \frac{x dx}{y^{m-1}}, \ldots \ldots \int \frac{x^{(m-1)(\nu+1)-2} dx}{y^{m-1}}$$

Die Anzahl der hier angeschriebenen Integrale ist:

$$\sum_1^{m-1} [j(\nu+1) - 1] = \frac{1}{2}(m-1)\{m(\nu+1) - 2\}$$

Das ist aber nach der Formel auf S. 9 gerade das Geschlecht p des algebraischen Gebildes, und da diese p Integrale ja nicht linear von einander abhängen, lässt sich irgend ein beliebiges Integral I. Gattung linear aus ihnen zusammensetzen. Danach erhält man p linear unabhängige φ von der Form:

$$\varphi_\alpha = x^\lambda y^{m-1-j}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq j(\nu+1) - 2, \quad 1 \leqq j \leqq m-1.$$

Jetzt sei die Beschränkung, dass alle k gleich 1 seien,

aufgehoben. Dann werden die Integrale wieder von der Form:

$$\int \frac{G_{j(\nu+1)-2}(x)\,dx}{y^j}, \quad (j = 1, 2, \ldots . m-1),$$

wo nur die $G_{j(\nu+1)-2}(x)$ specielle ganze Functionen der Ordnung $j(\nu+1)-2$ werden, und zwar werden von denjenigen Integralen, welche x bis zu einer gegebenen Potenz α hin im Zähler des Integranden enthalten, diejenigen mit einem Nenner y^j fortfallen, deren j eine gewisse (mit α zunehmende) Grösse, l_α, übersteigt. Die Zahlen l_α, α näher zu betrachten wird hier nicht nötig. Ferner geht φ_α dabei über in folgenden Ausdruck:

$$\varphi_\alpha = r_s(x) . x^\lambda . y^{m-1-j},$$

wo s von j abhängt und

$$0 \leqq \lambda \leqq j(\nu+1)-2-s, \quad 1 \leqq j \leqq m-1.$$

Hier ist

$$r_s(x) = (x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2} \ldots . . (x-a_h)^{s_h}$$

$$s_1 + s_2 + . . + s_k . . + s_h = s,$$

wobei die s_k 0 bez. ganzzahlige positive Grössen sind, deren Werte von j abhängen.

Ich gehe nunmehr an die eigentliche Aufgabe dieses Paragraphen. Soll die Fläche eine canonische sein, so muss eine ganze algebraische Function S auf derselben existieren, deren Nullstellen nur in den $2(m+p-1)$ Verzweigungspunkten liegen, derart dass ein $(\mu-1)$-facher Verzweigungspunkt als Nullstelle $(\mu-1)$-ter Ordnung zählt. Die Function S wird dann für $x = \infty$ in jedem der m Blätter

$$\frac{2(m+p-1)}{m} = d+2$$

mal unendlich, ich bezeichne sie demgemäss als vom Grade $d+2$ in x.

In der That wird eine solche Function S, falls sie existiert, durch die Formel:

$$S = \frac{(x-c)^d dx}{dw}$$

gegeben, wobei c irgend einen beliebigen constanten Wert von x bedeutet und dw durch die Bedingung bestimmt ist, dass dasselbe in jedem der m übereinander liegenden Punkte, $x = c$, d-mal verschwinde. In dem vorliegenden Falle setzt sich dw aus solchen $d+1$ dw_α zusammen, welche y alle in derselben Potenz y^l enthalten, und es wird demnach:

$$S = \frac{(x-c)^d dx}{\frac{r_s(x).(x-c)^d dx}{y^l}} = \frac{y^l}{r_s(x)} = \frac{y^l}{(x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\ldots.(x-a_h)^{s_h}}$$

$$1 \leqq l \leqq m-1$$

In einem Verzweigungspunkte α_i muss nun S $(\mu_i - 1)$-mal verschwinden; daraus ergiebt sich, dass

$$l\varkappa_i - s_i\mu_i = \mu_i - 1, \qquad s_i = \frac{l\varkappa_i - \mu_i + 1}{\mu_i}$$

Es muss also die Congruenz statthaben:

$$l\varkappa_i + 1 \equiv 0 \pmod{\mu_i}$$

Daraus folgt, erstens dass l und μ_i relativ prim sind, zweitens dass einem Werte von l entsprechend nur ein Wert von $\varkappa_i$ existiert, welcher dieser Congruenz genügt. Ist insbesondere ρ_i stets $= 1$, so sind sämmtliche k_i einander gleich und die Verzweigungsfunction heisst einfach:

$$y^{\frac{m-1}{k}}$$

Diese Bedingung für die $\varkappa_i$ umfasst in der That die aus der Anzahl der Unendlichkeitspunkte,

$$\Sigma_i(m-\rho_i) = m(d+2),$$

folgende Bedingung:

$$\Sigma_i \rho_i \equiv 0 \pmod{m};$$

denn aus der Congruenz

$$l\varkappa_i + 1 \equiv 0 \pmod{\mu_i}$$

oder

$$lk_i + \rho_i \equiv 0 \pmod{m}$$

folgt

$$l\Sigma_i k_i + \Sigma_i \rho_i \equiv 0 \pmod{m}$$

oder

$$\Sigma_i \rho \equiv 0 \pmod{m}.$$

Daraus geht folgendes Resultat hervor: Die Fläche ist stets dann und nur dann canonisch, wenn eine ganze Zahl $1 \leqq l \leqq (m-1)$ existiert, derart dass

$$l\varkappa_i + 1 \equiv 0 \pmod{\mu_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots h)$$

und

$$\Sigma_i k_i \equiv 0 \pmod{m}.$$

Die Verzweigungsform ist dann:

$$S = \frac{y^l}{r_s(x)}$$

§ 3

Die canonischen Flächen bei $\rho_i = 1$.

Die Bedingungen des letzten Paragraphen lassen sich auf mannigfache Weisen befriedigen, so dass man eine Mannigfaltigkeit von canonischen Flächen erhält, die zu Gleichungen von der Gestalt:

$$y^m = G_{m(r+1)}(x)$$

gehören. Für die Folge will ich von denjenigen dieser Flächen absehen, bei welchen die Exponenten m und k einen gemeinsamen Teiler haben. Für die anderen canonischen Flächen haben, wie im vorigen Paragraphen bemerkt, die sämmtlichen k den nämlichen Wert; es wird

$$y^m = (x - a_1)^k (x - a_2)^k \ldots (x - a_h)^k,$$

$$h \equiv 0 \pmod{m},$$

und es lässt sich dann y vermöge der ein-eindeutigen Substitution:

$$y = \eta_1^k,$$
$$\eta = \frac{[(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_h)]^\alpha}{y^\beta}$$

wo

$$\alpha m - \beta k = 1,$$

durch die einfachere algebraische Function η_1 auf der Fläche ersetzen; dabei geht die Gleichung über in folgende:

$$\eta_1^m = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_h).$$

Ich werde daher von jetzt an eine Gleichung von der Form:

$$y^m = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m(\nu+1)}) = G_{m(\nu+1)}(x)$$

oder

$$F(x, y) = 0$$

zu Grunde legen.

Die Verzweigungsfunction auf dieser Fläche heisst nach dem Früheren:

$$y^{m-1}.$$

Als ebene Curve aufgefasst besitzt das algebraische Gebilde

$$F(x, y) = 0$$

einen höheren singulären Punkt, der jetzt untersucht werden soll. Homogen geschrieben heisst die Gleichung:

$$y^m t^{m\nu} - G_{m(\nu+1)}(x_g t) = 0.$$

Diese Curve enthält nun einen einzigen mehrelementigen Punkt und zwar in $x = 0$, $t = 0$, der $m\nu$-elementig ist, wobei sämmtliche Elemente die Richtung $t = 0$ haben. Zwecks der weiteren Untersuchung (vgl. Noether, Math. Ann. Bd. 9) dieses singulären Punktes verwende ich der Kürze halber die nicht homogene Schreibweise, die durch $y = 1$ entsteht. Die Curvengleichung wird dann

$$t^{m\nu} - G_{m(\nu+1)}(x, t) = 0.$$

Durch die ein-eindeutige Substitution

$$t = t'x$$

geht die Curvengleichung über in:

$$t'^{m\nu} - x^m G(1, t') = 0.$$

Ist $\nu = 1$, so hat die transformierte Curve im Punkte $x = 0$, $t' = 0$ einen m-fachen Punkt mit lauter getrennten Zweigen. Die ursprüngliche Singularität ist demnach aufzufassen als aus 2 benachbarten m-fachen Punkten bestehend.

Ist $\nu > 0$, so hat die transformierte Curve einen m-elementigen Punkt in $x = 0$, $t' = 0$, dessen Zweige sämmtlich von der Geraden $x = 0$ berührt werden. Um jetzt diese Singularität weiter aufzulösen, wird man mittelst einer neuen Transformation der Form

$$x = x't'$$

statt x eine neue Variable x' einführen, wodurch die neue Curve

$$t'^{m(\nu-1)} - x'^m G(1, t') = 0$$

entsteht.

Für den Fall $\nu = 2$ besteht die vorliegende Singularität im Punkte $x' = 0$, $t' = 0$ wieder aus einem m-fachen Punkte mit getrennten Zweigen. Dementsprechend hat man also die Singularität der ursprünglichen Curve aufzufassen als bestehend aus einem $2m$-fachen und noch 2 m-fachen Punkten, welche 3 Punkte einander benachbart und successiv liegen.

Wenn $\nu > 2$ ist, sind nach der 2-ten Transformation die Zweige noch nicht getrennt, sie werden noch sämmtlich von der Geraden $x' = 0$ berührt, und man wird darum die Transformation

$$x' = t'x''$$

abermals anwenden. Nach ν Transformationen im Ganzen kommt man auf die Gleichung

$$t'^m - x^{(\nu-1)^m} G(1, t') = 0,$$

welche in $x^{(\nu-1)} = 0$, $t' = 0$ einen m-fachen Punkt mit lauter getrennten Zweigen besitzt. Daraus ergiebt sich folgendes Resultat: Die Singularität der ursprünglichen Curve lässt sich auffassen als bestehend aus einem $m\nu$-fachen und ν benachbarten m-fachen Punkten, welch letztere einander successiv liegen.

Dies gilt ohne Rücksicht auf Verzweigung. Da nun der letzt betrachtete Punkt aus m einfachen Zweigen bestand, so folgt, dass die ursprüngliche Singularität ebenfalls aus m getrennten Zweigen besteht, von denen aber jeder ν-elementig ist. Jeder dieser Zweige enthält also einen Verzweigungspunkt $(\nu - 1)$-ter Ordnung, so dass zu dem obigen vielfachen Punkte noch $m(\nu - 1)$ einfache Verzweigungspunkte treten. Dasselbe lehren die für $x = 0$, $t = 0$ existierenden Entwicklungen von t nach aufsteigenden Potenzen von x; es existieren deren m getrennte alle nach Potenzen von $x^{\frac{1}{m\nu}}$ fortschreitend.

§ 4.

Functionen auf der speciellen canonischen Fläche $p_i = 1$; die Covariante ψ.

Ich beginne mit den algebraischen Functionen auf dem algebraischen Gebilde des vorigen Paragraphen:

$$F(x, y) = 0,$$

also mit den Functionen:

$$R(x, y) \equiv \frac{H_1(x, y)}{H_2(x, y)},$$

wo H_1, H_2 ganze Functionen von x und y sind. Dieselben denke ich mir vermöge $F = 0$ auf die Form gebracht:

$$R(x,y) = \frac{H(x,y)}{G(x)}^{m-1} = \frac{G^{(1)}(x)}{G(x)} y^{m-1} + \frac{G^{(2)}(x)}{G(x)} y^{m-2} + \ldots + \frac{G^{(m)}(x)}{G(x)},$$

wobei H eine ganze Function von x und y, und zwar von nicht höherem als vom $(m-1)$-ten Grade in y, G, $G^{(1)}$, ... $G^{(m)}$ ganze Functionen von x sind.

Aus den allgemeinen algebraischen Functionen auf der Fläche scheiden sich hier die ganzen algebraischen Functionen auf der Fläche durch die Formel aus:

$$\Gamma_\alpha(x) = G^{(1)}(x) y^{m-1} + G^{(2)}(x) y^{m-2} + \ldots + G^{(m)}(x).$$

Dabei ist Γ_α eine ganze Function auf der Fläche vom $m\alpha$-ten Grade (eine ganze algebraische Function von x vom Grade α), $G^{(i)}$ eine ganze Function von x vom $[\alpha-(m-1)(\nu+1)]$-ten Grade. Diesen von anderer Seite her bekannten Satz (s. Kronecker, Cr. J. 91; Dedekind-Weber, ibid. 92) will ich mittelst des Riemann-Rochschen Satzes beweisen. Derselbe sagt aus, dass die Anzahl der Constanten, welche in eine an M gegebenen Stellen unendlich werdende algebraische Function auf der Fläche eingehen,

$$M - p + \tau + 1$$

ist, wo τ die Anzahl der linear unabhängigen adjungierten φ bedeutet, durch welche die M Punkte verknüpft werden. Im vorliegenden Falle ist $M = m\alpha$. Sei nun zunächst angenommen, $M > 2p-2$, dann ist die Anzahl der Constanten nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$m\alpha - p + 1.$$

Das ist aber genau die Anzahl der Constanten, welche in $\Gamma_\alpha(x)$ nach der Abzählung wirklich enthalten sind. Ist dagegen $M \leqq 2p-2$, so lassen sich hier die ganzen Functionen auf der Fläche rational und ganz aus den φ zusammensetzen, so dass sie wieder nach den früheren Betrachtungen über die φ die oben angeschriebene Gestalt haben.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Indem ich jetzt durch die Substitution

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

statt x die homogenen Variablen x_1, x_2 einführe, definiere ich eine ganze algebraische Form α-ten Grades von x, $\Gamma_\alpha(x_1, x_2)$, durch die Relation:

$$x_2^\alpha \Gamma_\alpha(x) = \Gamma_\alpha(x_1, x_2).$$

Diese Form lässt sich bei vorliegender Fläche, wie folgt, darstellen:

$$\Gamma_\alpha(x_1, x_2) = G^{(1)}(x)\, y_x^{m-1} + G^{(2)}(x)\, y_x^{m-2} + \ldots + G^{(m)}(x).$$

Hier bedeutet $G^{(i)}(x)$ eine ganze homogene Form $[\alpha - (m-1)(\nu+1)]$-ten Grades in den homogenen Variablen x_1, x_2, während

$$x_2^{\nu+1} y = y_x$$

gesetzt ist. Insbesondere leite ich aus der „Verzweigungsfunction", y^{m-1}, die „Verzweigungsform" y_x^{m-1} her und führe das Differential $d\omega$ durch die Gleichung

$$d\omega = \frac{(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)}{y_x^{m-1}} = \frac{(x\, dx)}{y_x^{m-1}}$$

ein.

Ich gehe jetzt zur Aufstellung der Form ψ, welche mit $\frac{d\omega_x d\omega_t}{(xt)^2}$ multipliciert, wo t irgend einen Punkt der Fläche bedeutet, den covariant normierten Integranden III. Gattung bilden soll. Ich werde ein ψ aufstellen, das folgende Bedingungen erfüllt, und zwar wird sich ψ durch dieselben eindeutig ergeben.

1) ψ muss (als Form III. Gattung) eine ganze algebraische Form $(d+2)$-ten Grades von x sein;

2) ψ muss verschwinden und zwar doppelt verschwinden, wenn $x = t$, ohne dass zugleich $y_x = y_t$ wird;

3) ψ muss unverändert bleiben, wenn x und t miteinander vertauscht werden;

4) ψ muss eine ganze algebraische Form $(d+2)$-ten Grades von t sein;

5) wenn $x = t$ und zugleich auch $y_x = y_t$, so muss $\psi = y_t^{2m-2}$;

6) ψ muss in den Coefficienten von $G_{m(\nu+1)}(x)$ vom $(\frac{2m-2}{m})$-ten Grade sein;

7) ψ muss eine ganze rationale Covariante von $G_{m(\nu+1)}(x)$ sein.

Es lässt sich nun ψ zunächst mit Rücksicht auf Bedingungen 1) und 4) in der Form schreiben:

$$\psi = F_1(x,t,y_t)\,y_x^{m-1} + F_2(x,t,y_t)\,y_x^{m-2} + \ldots + F_m(x,t,y_t),$$

wo

$$F_i(x,t,y_t) = H_{i,1}(x,t)\,y_t^{m-1} + H_{i,2}(x,t)\,y_t^{m-2} + \ldots \\ \ldots + H_{i,m}(x,t)$$

Hier bedeutet $H_{i,j}$ eine ganze rationale Form $(i-1)(\nu+1)$-ten Grades von x, deren Coefficienten ganze Formen $(j-1)(\nu+1)$-ten Grades von t sind. Ferner ist $H_{i,j}$ in den Coefficienten von $G_{m(\nu+1)}(x)$ vom Grade $\frac{i+j-2}{m}$. Da ψ rational in den Coefficienten sein soll, muss $\frac{i+j-2}{m}$ eine ganze Zahl sein, also 0 oder 1 wegen $2 \leqq i+j \leqq 2m$. Daher kommen nur die Glieder vor, für welche $i = 1$, $j = 1$, oder $j = m-i+2$. Da ferner nach 7) ψ eine ganze Covariante werden soll, so wird $H_{1,1}$ eine numerische Constante, c_1, während für $i > 1$

$$F_i(x,t,y_t) = H_{i,m-i+2}(x,t)\,y_t^{i-2} = L_i(x,t)\,.\,y_a^{i-2}.$$

Es wird sonach:

$$\psi = c_1 y_x^{m-1} y_t^{m-1} + L_2(x,t)\,y_x^{m-2} + L_3(x,t)\,y_t y_x^{m-3} + \ldots \\ \ldots + L_m(x,t)\,y_t^{m-2}$$

wobei $L_i(x,t)$ in den Coefficienten von $G_{m(\nu+1)}(x)$ vom 1-ten Grade, in x vom $(i-1)(\nu+1)$-ten Grade, und in t vom $\{m-(i-1)\}(\nu+1)$-ten Grade ist. Solche L müssen aber wegen des Grades 1 in den Coefficienten bis auf numerische Factoren c Polaren von

$$G_{m(\nu+1)}(x) = a_x^{m(\nu+1)}$$

sein, so dass

$$\psi = c_1 y_t^{m-1} y_x^{m-1} + c_2 a_x^{\nu+1} a_t^{(m-1)(\nu+1)} y_x^{m-2} + c_3 a_x^{2(\nu+1)} a_t^{(m-2)(\nu+1)} y_t y_x^{m-3} \ldots$$
$$\ldots + c_m a_x^{(m-1)(\nu+1)} a_t^{\nu+1} y_t^{m-2}$$

wird. Der Bedingung 2) entsprechend sind zunächst folgende $(m-1)$ Gleichungen zu erfüllen:

$$c_1 y_t^{m-1} y_t'^{m-1} + c_2 a_t^{m(\nu+1)} y_t'^{m-2} + \ldots + c_m a_t^{m(\nu+1)} y_t^{m-2} = 0$$
$$c_1 y_t^{m-1} y_t''^{m-1} + c_2 a_t^{m(\nu+1)} y_t''^{m-2} + \ldots + c_m a_t^{m(\nu+1)} y_t^{m-2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_1 y_t^{m-1} y_t^{(m-1)^{m-1}} + c_2 a_t^{m(\nu+1)} y_t^{(m-1)^{m-2}} + \ldots + c_m a_t^{m(\nu+1)} y_t^{m-2} = 0$$

wobei $y_t, y_t', \ldots y_t^{(m-1)}$ die m Werte von y sind, die dem Werte t entsprechen. Eine Lösung dieser Gleichungen ist, wie sich leicht zeigt,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_m.$$

Denn, sei

$$y_t^{(k)} = \varepsilon^k y_t,$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}},\ k = 1, 2, \ldots m-1;$$

so wird

$$c_1 \left\{ y_t^{m-1} y_t^{(k)^{m-1}} + a_t^{m(\nu+1)} y_t^{(k)^{m-2}} + \ldots + a_t^{m(\nu+1)} y_t^{m-2} \right\}$$
$$= c_1 y_t^{2m-2} \left\{ \varepsilon^{k(m-1)} + \varepsilon^{k(m-2)} + \ldots + \varepsilon^k + 1 \right\} = 0.$$

Da ferner nicht alle $(m-1)$-reihigen Determinanten der obigen $(m-1)$ Gleichungen, indem die Discriminante von $F(x,y)$ nicht 0 sein soll, verschwinden, ist nur eine Lösung möglich, womit denn die Grössen c bis auf einen gemeinsa-

men Factor bestimmt sind. Schliesslich ergiebt sich aus 5), dass

$$m c_1 y_t^{2m-2} = y_t^{2m-2}, \quad c_1 = \frac{1}{m}.$$

Hiermit ist ψ vollkommen bestimmt:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{m}\Big\{y_t^{m-1} y_x^{m-1} + a_x^{\nu+1} a_t^{(m-1)(\nu+1)} y_x^{m-2} +$$

$$a_x^{2(\nu+1)} a_t^{(m-2)(\nu+1)} y_t y_x^{m-3} + \ldots + a_x^{(m-1)(\nu+1)} a_t^{\nu+1} y_t^{m-2}\Big\}.$$

Dieses ψ genügt ersichtlich der Bedingung 3), es erübrigt also nur noch nachzuweisen, dass ψ auch den zweiten Teil von 2) erfüllt. Den Beweis dafür liefert das gleichzeitige Verschwinden von $d\psi$ an einer Stelle t, $y_t^{(k)}$; in der That wird, wie man leicht nachrechnet,

$$d\psi \Big|_{\substack{x=t \\ y_x=y_t^{(k)}}} = \frac{(m-1)(\nu+1)\varepsilon^{k(m-2)}}{m\varepsilon^{k(m-1)}} y_t^{m-2} a_t^{m(\nu+1)-1} a_{dx}[\varepsilon^{k(m-1)} + \varepsilon^{k(m-2)} + \ldots + \varepsilon^k + 1] = 0.$$

Es ist also wirklich gelungen, eine covariant normierte ganze Form ψ aufzustellen, welche mit $\frac{d\omega_x d\omega_t}{(xt)^2}$ multipliciert, einen Integranden III. Gattung bildet. Die Integrale

$$\int^x \int^\xi \frac{\psi}{(xt)^2} d\omega_x d\omega_t \quad \text{und} \quad \int^x \frac{\psi}{(xt)^2} d\omega_x$$

bezeichnet man als die algebraisch normierten Integrale III. bez. II. Gattung.

§ 5.

Reductionsformel für die Integrale II. Gattung.

Es soll hier das Integral II. Gattung:

$$\int_{\bar{x}}^{x} \frac{\psi}{(xt)^2} d\omega_x = Z_{\bar{x}}^{x}(t),$$

wo x, $\bar{x}$ beliebige Punkte der Fläche sind, durch eine lineare Verbindung von p Integralen:

$$Z^{x\bar{x}}(t'),\quad Z^{x\bar{x}}(t''),\ \ldots.\ Z^{x\bar{x}}(t^p),$$

wobei die p Punkte t', t'', $\ldots t^p$ durch keine φ-Curve verknüpft sein dürfen, und eine algebraische Form von x, $\bar{x}$, und den t^i, ausgedrückt werden. Zur Aufstellung dieser Reductionsformel betrachte man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} Z^{x\bar{x}}(t) & Z^{x\bar{x}}(t') & Z^{x\bar{x}}(t'') & \ldots & Z^{x\bar{x}}(t^p) \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \ldots\ldots\ldots & & \varphi_1(t^p) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ \varphi_p(t) & \ldots & \ldots\ldots\ldots & & \varphi_p(t^p) \end{vmatrix}$$

Dieselbe lässt sich, wie aus den Riemannschen Sätzen folgt und wie Herr Noether durch direkte Umformung für beliebig normierte Integrale II. Gattung allgemein gezeigt hat („über d. alg. Diff.-Ausdrücke", 2. Note, Sitz.-Ber. d. Erlanger Societät, 16. Heft) auch in der Form darstellen:

$$\frac{\chi\overbrace{(x,\bar{x}}^{p+1};\ \overbrace{t,t',\ldots t^p}^{d+2};\ \overbrace{\text{Coeff.}}^{A})}{(xt)\,(xt')\ldots.(xt^p)\,.\,(\bar{x}t)\,(\bar{x}t')\ldots.(\bar{x}t^p)},$$

$$A = \frac{(m-1)\,(m-2)\,m(\nu+1) - 3\,(m-1)\,(m-4)}{6m},$$

wo χ eine ganze algebraische Form der $x, \bar{x}$; der $t, t', \ldots t^p$; und der Coefficienten vom beigefügten Grade wird. Man sieht unmittelbar, dass χ folgende Bedingungen erfüllt:

1) χ ist eine alternierende Form von x und $\bar{x}$;

2) χ verschwindet folglich, und zwar einfach, wenn $x = \bar{x}$, $y_x = y_{\bar{x}}$;

3) χ verschwindet einfach, wenn $x, \bar{x} = t, t', t'' \ldots t^p$, ohne dass zugleich $y_x, y_{\bar{x}} = y_t, y_{t'}, \ldots y_{t^p}$ wird;

4) χ ist eine alternierende Form der $t, t', \ldots. t^p$;

5) χ verschwindet folglich einfach, wenn $t^i = t^k$, $y_{t^i} = y_{t^k}$, wo $t^i, t^k = t, t', \ldots t^p$.

Um die Form χ aufzubauen, wird man dieselbe zunächst als Form in t betrachten und die Bedingungen 3) und 5) für t zu erfüllen suchen. Es wird sich zeigen, dass alsdann die übrigen Bedingungen von selbst erfüllt sind. Die allgemeinste ganze algebraische Form $(d+2)$-ten Grades von t lässt sich nach dem vorigen Paragraphen so darstellen:

$$\Gamma_{d+2}(t) = a y_t^{m-1} + (a_0 t_1^{\nu+1} + a_1 t_1^{\nu} t_2 + \ldots + a_{\nu+1} t_2^{\nu+1}) y_t^{m-2} +$$
$$+ (b_0 t_1^{2(\nu+1)} + b_1 t_1^{2(\nu+1)-1} t_2 + \ldots + b_{2(\nu+1)} t_2^{2(\nu+1)}) y_t^{m-3} + \ldots .$$
$$\ldots + h_0 t_1^{(m-1)(\nu+1)} + h_1 t_1^{(m-1)(\nu+1)-1} t_2 + \ldots + h_{(m-1)(\nu+1)} t_2^{(m-1)(\nu+1)}.$$

Die Anzahl der Verhältnisse der Coefficienten, die darin stecken, ist

$$p + 2m - 2.$$

Bestimmt man zunächst $\Gamma_{d+2}(t)$ so, dass

$$\Gamma_{d+2}(x)_{\varepsilon^k y_x} = 0$$

und ebenfalls:

$$\Gamma_{d+2}(\bar{x})_{\varepsilon^k y_{\bar{x}}} = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots m-1),$$

dann wird

$$\frac{\Gamma_{d+2}(t)}{(xt)(\bar{x}t)}$$

als Form d-ten Grades von t nur in den beiden Punkten $t = x$ und $t = \bar{x}$ unendlich. Dieser Form sind, 5) entsprechend, folgende Bedingungen aufzuerlegen:

$$\Gamma_{d+2}(t')_{y_{t'}} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\Gamma_{d+2}(t^p)_{y_{t^p}} = 0.$$

Ist L eine bestimmte solche Form, so ist jede andere darstellbar durch

$$eL + (xt)(\bar{x}t)\varphi(t),$$

wo e von t unabhängig und wo nun noch $\varphi(t)$ für $t = t'$, t'', $\ldots t^p$ verschwinden muss, daher wegen der Annahme über die t identisch 0 wird. Man kann folglich aus den $p + 2m - 2$ Gleichungen die $p + 2m - 2$ Verhältnisse der Constanten eindeutig bestimmen. Ich behaupte, dass die so gefundene Form Γ, mit gewissen von t unabhängigen Factoren multipliciert, die oben genannten Eigenschaften von χ besitzt. Γ schreibt sich zunächst als $(p + 2m - 1)$-reihige Determinante Δ von folgender Gestalt an: die erste Reihe von Δ lautet:

$$| \; y_t^{m-1} \quad t_1^{\nu+1} y_t^{m-2} \quad t_1^{\nu} t_2 y_t^{m-2} \ldots t_2^{\nu+1} y_t^{m-2} \quad t_1^{2(\nu+1)} y_t^{m-3} \ldots t_2^{2(\nu+1)} y_t^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots t_1^{(m-1)(\nu+1)} \ldots . t_2^{(m-1)(\nu+1)} \; |$$

Daraus gehen zunächst p weitere Reihen hervor, indem man t successiv durch $t', t'', \ldots t^p$ ersetzt. Darauf folgen dann noch $m - 1$ Reihen in x, die sich aus der t-Reihe dadurch ergeben, dass man je an Stelle t, x, an Stelle y_t, $\varepsilon^k y_x$ $(k = 1, 2, \ldots m - 1)$ setzt. Und endlich kommen noch $m - 1$ analog gebildete Reihen in $\bar{x}$. Δ enthält aber gewisse überschüssige Factoren in x und $\bar{x}$, nämlich y_x, $y_{\bar{x}}$, und $(x\bar{x})$, je in eine gewisse Potenz erhoben. In der That kann man Δ so durch Addieren und Subtrahieren der x-Reihen umformen, dass die 2te x-Reihe den Factor y_x, die 3te x-Reihe den Factor $y_x^2 \ldots$ die $(m-1)$-te x-Reihe den Factor y_x^{m-2} enthält. Formt man nun die $m - 1$ $\bar{x}$-Reihen ebenso um, so tritt vor die ganze Determinante Δ der Factor

$$(y_x y_{\bar{x}})^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}.$$

Setzt man also

$$\Delta = \alpha \Delta' (y_x y_{\bar{x}})^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)},$$

wo α eine numerische Grösse, so lässt sich Δ' folgendermassen schreiben:

$$\Delta' = \begin{array}{cccccccccc}
\overbrace{y_t^{m-1}}^{0} & \overbrace{t_1^{\nu+1} y_t^{m-2} & t_1^{\nu} t_2 y_t^{m-2} & \ldots t_2^{\nu+1} y_t^{m-2}}^{1} & \overbrace{t_1^{2(\nu+1)} y_t^{m-3} & \ldots . t_2^{2(\nu+1)} y_t^{m-3}}^{2} & \ldots & \overbrace{t_1^{(m-1)(\nu+1)} & \ldots t_2^{(m-1)(\nu+1)}}^{m-1} \\
y_{t'}^{m-1} & t_1'^{\nu+1} y_{t'}^{m-2} & t_1'^{\nu} t_2' y_{t'}^{m-2} & \ldots t_2'^{\nu+1} y_{t'}^{m-2} & t_1'^{2(\nu+1)} y_{t'}^{m-3} & \ldots . t_2'^{2(\nu+1)} y_{t'}^{m-3} & \ldots & t_1'^{(m-1)(\nu+1)} & \ldots t_2'^{(m-1)(\nu+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
y_{t^p}^{m-1} & t_1^{p\nu+1} y_{t^p}^{m-2} & t_1^{p\nu} t_2^{p} y_{t^p}^{m-2} & \ldots t_2^{p\nu+1} y_{t^p}^{m-2} & t_1^{p2(\nu+1)} y_{t^p}^{m-3} & \ldots . t_2^{p2(\nu+1)} y_{t^p}^{m-3} & \ldots & t_1^{p(m-1)(\nu+1)} & \ldots t_2^{p(m-1)(\nu+1)} \\
-y_x^{m-1} & 0 & 0 & \ldots \quad 0 & 0 & \ldots . \quad 0 & \ldots & x_1^{(m-1)(\nu+1)} & \ldots x_2^{(m-1)(\nu+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-y_x & x_1^{\nu+1} & x_1^{\nu} x_2 & \ldots x_2^{\nu+1} & 0 & \ldots . \quad 0 & \ldots & 0 & \ldots \quad 0 \\
-y_{\bar{x}}^{m-1} & 0 & 0 & \ldots \quad 0 & 0 & \ldots . \quad 0 & \ldots & \bar{x}_1^{(m-1)(\nu+1)} & \ldots \bar{x}_2^{(m-1)(\nu+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-y_{\bar{x}} & \bar{x}_1^{\nu+1} & \bar{x}_1^{\nu} \bar{x}_2 & \ldots \bar{x}_2^{\nu+1} & 0 & \ldots . \quad 0 & \ldots & 0 & \ldots \quad 0
\end{array}$$

Das Bildungsgesetz von Δ' ist leicht erkennbar; um die i-te x-Reihe zu erhalten, hat man in der Colonne 0 y_t^{m-1} durch $-y_x^{m-i}$, dann in der Colonnengruppe $m-i$ t durch x, y_t^{i-1} durch 1, und schliesslich sämmtliche andere Elemente durch

0 zu ersetzen. Die $\bar{x}$-Reihen werden auch in genau derselben Weise gebildet.

Δ' verschwindet nun für $x = \bar{x}$, statt einfach, $(m-1)$-fach, und muss darum noch durch $(x\bar{x})^{m-2}$ dividiert werden. Hiermit sind jetzt alle überschüssigen Factoren in x ausdividiert worden, und man erhält eine Form,

$$\frac{\Delta'}{(x\bar{x})^{m-2}},$$

welche vom $(p+1)$-ten Grade in $x, \bar{x}$, vom $(d+2)$-ten Grade in den t, und vom A-ten Grade in den Coefficienten von $G_{m(p+1)}(x)$ wird, also sich von χ nur um einen numerischen Factor, c, unterscheidet:

$$c\,\frac{\Delta'(x,\bar{x};\ t,t',..t^p)}{(x\bar{x})^{m-2}} = \chi(x,\bar{x};\ t,t'\ldots t^p)$$

Um endlich c zu bestimmen, lasse man $x = t$ werden; dann wird die Determinante der Z und φ unendlich wie

$$-y_i^{m-1}(\varphi_i(t')\ldots\ldots\varphi_i(t^p));$$
$$(i = 1, 2, \ldots p)$$

χ wird seinerseits unendlich wie

$$c\,\frac{\Delta'(t,\bar{x};\ t,t',\ldots t^p)}{(t\bar{x})^{m-2}(tt')\ldots(tt^p)(\bar{x}t)(\bar{x}t')\ldots\ldots(\bar{x}t^p)},$$

folglich:

$$c = \frac{y_i^{m-1}(\varphi_i(t')\ldots\varphi_i(t^p))\,(t\bar{x})^{m-1}(tt')\ldots(tt^p).(\bar{x}t')\ldots(\bar{x}t^p)}{\Delta'(t,\bar{x};\ t,t',\ldots t^p)}$$

und die fertige Reductionsformel heisst:

$$\begin{vmatrix} Z^{x\bar{x}}(t) & Z^{x\bar{x}}(t') & \ldots\ldots & Z^{x\bar{x}}(t^p) \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \ldots\ldots & \varphi_1(t^p) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \varphi_p(t) & \varphi_p(t') & \ldots\ldots & \varphi_p(t^p) \end{vmatrix} =$$

$$= c\,\frac{\Delta'(x,\bar{x};\ t,t'\ldots t^p)}{(x\bar{x})^{m-2}(xt)(xt')\ldots(xt^p).(\bar{x}t)(\bar{x}t')\ldots(xt^p)}.$$

II.

§ 6.

Allgemeines über das specielle Zweiteilungsproblem.

Ich wende mich jetzt zu der Betrachtung der überall berührenden Curven, welche zu dem algebraischen Gebilde

$$F(x,y) = 0$$

gehören. Ich erinnere dabei zunächst an gewisse Fundamentalsätze dieser Theorie, welche von Herrn Noether in Bd. 17 der math. Ann. (Inv. Darstellung d. alg. Funct.) formuliert worden sind. Es möge irgend eine ganze homogene Function der p adjungierten φ von der μ-ten Dimension als

$$\Phi^{(\mu)}$$

irgend eine Curve $\Phi^{(\mu)}$, deren $\mu(2p-2)$ Schnittpunkte mit der Grundcurve paarweise zusammenfallen als

$$X^{(\mu)}$$

bezeichnet werden. Solche $X^{(\mu)}$ teilt man zunächst in gewisse Systeme vermöge folgender Definition ein, indem man sagt: zwei Berührungscurven $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$ gehören zu demselben System, wenn eine Curve $\Phi^{\frac{(\mu+\nu)}{2}}$ existiert, welche durch ihre sämmtlichen Berührungspunkte mit der Grundcurve gelegt werden kann. μ und ν müssen also beide gerade oder beide ungerade Zahlen sein. Hinsichtlich dieser Systeme führe ich nun folgendes an: Es giebt keine weiteren Systeme, als eine endliche Anzahl von Systemen der $X^{(3)}$ und eine endliche Anzahl von Systemen der $X^{(2)}$. Alle Berührungscurven $X^{(2\mu+1)}$ gehören mit Curven $X^{(3)}$, alle $X^{(2\mu)}$ mit Curven $X^{(2)}$ zu Systemen zusammen. Ferner: Die Systeme $X^{(3)}$ zerfallen in 2 Arten: ein System, der ersten Art besteht nur aus solchen Curven $X^{(3)}$, durch deren Be-

rührungspunkte keine $\Phi^{(2)}$ geht; ein System der zweiten Art aus solchen, durch deren Berührungspunkte eine $\Phi^{(2)}$ gelegt werden kann. Zu einem System der zweiten Art gehört immer eine Berührungscurve $X^{(1)}$ oder eine Schaar solcher; und je nach der Mannigfaltigkeit dieser Schaar hat man wieder Unterarten der zweiten Art (von denen weiter unten die Rede sein wird). Die Systeme der $X^{(2)}$ zerfallen ebenfalls in zwei Arten: die eine Art enthält nur das uneigentliche System $[\Phi^{(1)}]^2$ — und die entsprechenden $X^{(2\omega)}$ sind identisch mit den Curven $[\Phi^{(\omega)}]^2$ —; die andere Art enthält die übrigen, eigentlichen Systeme $X^{(2)}$. Alle Systeme lassen sich durch Combinationen von Systemen der $X^{(3)}$ ableiten.

Des Weiteren erteilt man den einzelnen Systemen Characteristiken (vgl. Noether Zum Umkehrproblem in d. Th. d. Abelschen Funct., math. Ann. Bd. 28), und zwar erhalten die Systeme der $X^{(3)}$ die sogenannten Prim- (oder eigentlichen) characteristiken, die Systeme der $X^{(2)}$ dagegen die sogenannten Elementar- (oder Gruppen-)characteristiken (nach der Ausdrucksweise des Hrn. Klein: z. Th. d. Abelschen Funct., § 12, Ann. 36; auch Ann. 35, pag. 246). Die Primcharacteristiken zerfallen wieder unter sich, der oben erwähnten Unterscheidung entsprechend, resp. in gerade und ungerade Characteristiken, und zwar je nachdem eine gerade (0 eingeschlossen) oder eine ungerade Anzahl von linear unabhängigen Curven $\Phi^{(2)}$ durch die Berührungspunkte der $X^{(3)}$ hindurchgehen.

Von den Elementarcharacteristiken ist immer eine als uneigentliche ausgezeichnet, dem uneigentlichen System $[\Phi^{(1)}]^2 = X^{(2)}$ entsprechend.

Die Anzahl der sämmtlichen Characteristiken ist 2^{2p}; der Primcharacteristiken giebt es bez. $2^{p-1}(2^p - 1) = R_p$ ungerade und $2^{p-1}(2^p + 1) = S_p$ gerade. Die Elementarcharacteristiken zerfallen in 1 und $2^{2p} - 1$.

Für die Folge will ich ungerade Primcharacteristiken durch die griechischen Buchstaben α, β, γ . . ., gerade Primcharacteristiken durch die lateinischen Buchstaben $a, b, c \ldots$, Elementarcharacteristiken durch A, B, C, . . . bezeichnen. Hat man zwei Characteristiken von irgend welchen Arten, h und h', die zu den Curven $X_h^{(u)}$ und $X_{h'}^{(u')}$ gehören, so wird der Curve $X^{(u+u')} = X_h^{(u)} X_{h'}^{(u')}$ die Characteristik hh' zugeordnet, welche als „Summe“ von h und h' bezeichnet wird. Aus dieser Zuordnung folgt also, dass in einer Summe von einer Reihe solcher Characteristiken 2 gleiche Characteristiken sich gegenseitig aufheben.

Von den daraus hervorgehenden Regeln brauche ich folgende:

1) die Summe einer geraden Anzahl von Primcharacteristiken ist eine Elementarcharacteristik;

2) die Summe einer ungeraden Anzahl von Primcharacteristiken ist wieder eine Primcharacteristik;

3) die Summe irgend einer Anzahl von Elementarcharacteristiken ist wieder eine Elementarcharacteristik.

Das einzige bei der Gruppe der Periodenzweiteilungsgleichung invariante Criterium, auf welches alle anderen zurückführbar sind, ist, ausser der obigen Einteilung der Characteristiken in verschiedene Arten, folgendes, ob nämlich der Character einer Summe von 3 Primcharacteristiken gerade oder ungerade ist. Insbesondere folgt daraus, dass irgend einer Elementarcharacteristik gegenüber alle anderen in 2 Klassen zerfallen müssen. Denn, sei die erste $A = \alpha\beta$, die zweite $A' = \alpha'\beta'$, so können $A\alpha'$, $A\beta'$ gleichen oder ungleichen Character haben, wobei dasselbe gleichzeitig für $A'\alpha$, $A'\beta$ eintritt (dementsprechend nennt man A, A' syzygetisch bez. azygetisch; Bezeichnung von Frobenius, Cr. Bd. 96).

Das algebraische Gebilde, welches hier in Betracht

kommt, lässt eine gewisse eindeutige Transformation in sich zu. Setzt man nämlich

$$y' = \varepsilon y \quad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}),$$

so wird die Fläche in sich selbst übergeführt, ohne dass dabei jeder Punkt an seine ursprüngliche Lage zurückkommt. Nimmt man diese Transformation mehrmals vor, indem man setzt:

$$y'' = \varepsilon y', \quad y''' = \varepsilon y'', \quad \text{u. s. w.},$$

so kommt man schliesslich, und zwar nach m solchen Transformationen auf die anfängliche Fläche zurück. Die Transformation ist also cyclisch von der Ordnung m. Bei einer solchen Transformation werden auch die algebraischen Functionen auf der Fläche mit herübergeführt; insbesondere wandelt sich irgend ein System von Berührungscurven in ein neues solches System um. Es tritt hierdurch eine Einteilung der R_p ungeraden Berührungscurvensysteme der $X^{(3)}$, sowie der S_p geraden Berührungscurvensysteme der $X^{(3)}$ in Cyclen von je m ein, die alsdann die Eigenschaft haben, dass immer 2 Curven, welche ein und demselben Cyclus angehören, durch mehrmalige Anwendung der obigen Transformation, $y' = \varepsilon y$, ineinander übergeführt werden können, während dies bei zwei zu zwei verschiedenen Cyclen zugehörigen Curven nicht gilt. Die m Curven eines Cyclus können alle verschieden sein oder sich auch gruppenweise decken.

Dem oben erörterten Sachverhalt auf dem vorliegenden algebraischen Gebilde entspricht nun eine gewisse Periodentransformation. Denkt man sich irgend eine canonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche ausgeführt, so geht dieselbe bei der Transformation wieder in eine solche über, was nun eben eine lineare Periodentransformation hervorruft, welche denn gleichfalls von dem Cyclus m sein muss. Aus dieser so abgeleiteten Periodentransformation ergiebt sich dann ohne weiteres die zugehörige Characteristikentransfor-

mation für alle $X^{(\omega)}$. Diese Characteristikentransformation vom Cyclus m ist in dem vorgelegten Zweiteilungsproblem ausgezeichnet und erniedrigt die Galoissche Gruppe der Gleichung. So tritt an Stelle der Gleichung vom Grade R_p für alle Berührungs-$X^{(1)}$ hier zunächst eine Gleichung von einem Grade Q ($Q \leqq R_p$) für alle diejenigen Q Curven der Hauptart, welche zu Cyclen von je m verschiedenen Curven führen. Diese Gleichung reduciert sich auf eine Gleichung vom Grade $\frac{Q}{m}$ nebst einer reinen Gleichung m-ten Grades. Die Untersuchung dieser Verhältnisse will ich mit Hilfe der Characteristikentheorie an einem speciellen Falle ($m = 3$, $\nu = 1$, $p = 4$) durchführen.

§ 7.

Die Functionen $X^{(1)}$ auf dem algebraischen Gebilde $y^3 = f_6(x)$.

Indem ich jetzt $m = 3$, $\nu = 1$ und also $p = 4$ annehme, schreibe ich die so specializierte Gleichung $F(x, y) = 0$ in der Form

$$y^3 = f_6(x).$$

Das allgemeine φ hat hier die Form:

$$\varphi = Ay + Bx^2 + Cx + D,$$

wo $A \ldots D$ Constante sind. Dasselbe wäre zunächst, als adjungierte Curve $(n-3)$-ter Ordnung, eine C_3, welche die beiden benachbarten dreifachen Punkte der Grundcurve im Punkte $x = t = 0$ in der Richtung $t = 0$ zu Doppelpunkten hätte, also, homogen geschrieben, in die Gerade $t = 0$ durch diese Punkte und in den Kegelschnitt:

$$Ayt + Bx^2 + Cxt + Dt^2 = 0,$$

welcher ebenfalls durch dieselben geht, zerfiele.

Ist $A = 0$, so besteht die Curve $\varphi = 0$ aus zwei beliebigen Geraden durch den Punkt $x = t = 0$:

$$Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Fallen die beiden Geraden zusammen, so entsteht eine Berührungscurve $X^{(1)}$ uneigentlicher Art von der Mannigfaltigkeit ∞^1.

Ist dagegen $A \lesseqgtr 0$, so hat man als Curve $\varphi = 0$,

$$y + u_2 = 0;$$

dieser Kegelschnitt schneidet die Grundcurve in den $2p - 2 = 6$ beweglichen Punkten, deren x-Coordinaten durch die Gleichung

$$f_6 = -u_2^3$$

gegeben werden. Aus der Curve $\varphi\,(= \Phi^{(1)})$ entsteht alsdann die Curve $X^{(1)}$, indem diese 6 Schnittpunkte paarweise zusammenfallen, d. h. die Coefficienten von u_2 so bestimmt werden, dass

$$f_6 + u_2^3 \equiv v_3^2$$

wird, wo v_3 eine ganze Function 3ten Grades von x bedeutet. Die Aufgabe besteht also darin, f_6 auf alle möglichen Weisen in die Form zu bringen:

$$f_6 = v_3^2 - u_2^3.$$

Aus jeder Lösung (v_3^2, u_2^3) entspringt hier, indem man u_2 durch εu_2 resp. $\varepsilon^2 u_2$ ersetzt, ein Cyclus von 3 Berührungscurven $X^{(1)}$.

Dieselbe Aufgabe für f ist aber schon von Clebsch (Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 14) behandelt worden, und zwar bei dem Problem der speciellen Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen für $p = 2$. Legt man nämlich für diesen Fall dem hyperelliptischen Gebilde die Gleichung

$$y^2 = f_6(x)$$

zu Grunde, so schneidet die Curve

$$y + v_3 = 0,$$

wo v_3 eine ganze rationale Function 3ten Grades von x bedeutet, die Grundcurve gleichfalls in 6 Punkten. Sollen dieselben zu je 3 zusammenfallen, so muss

$$f_6 - v_3^2 \equiv -u_2^3$$

sein, wo u_2 eine quadratische Function von x werden muss. Dies ist genau das obige Problem. Ein Unterschied tritt erst darin ein, dass aus jeder Lösung (v_3^2, u_2^3) hier durch Ersetzen von v_3 durch $-v_3$ ein zusammengehöriges Paar von Berührungscurven erhalten wird.

Clebsch behandelt das Problem mit rein algebraischen Mitteln, während die Dreiteilungsaufgabe für $p = 2$ bei Camille Jordan (Théorie des Substit., No. 441 ff. u. No. 499 ff.) gruppentheoretisch discutiert ist. Diese Betrachtung lässt sich auch leicht an der Hand der 40 Elementardrittelcharacteristiken für $p = 2$ durchführen. Aus der Identität des algebraischen Problems schliesst man, dass die Halbercharacteristiken der vorliegenden Grundcurve mit $p = 4$ die analogen Gruppenverhältnisse zulassen müssen. Diese Thatsache will ich jetzt aus den Characteristiken dieser Grundcurve für $p = 4$ selbst erschliessen, indem ich nachweise, welche invarianten Characteristikeneigenschaften derselben zu Grunde liegen.

§ 8.

Die Riemannsche Fläche für $y^3 = f_6(x)$ und die cyclische Periodentransformation.

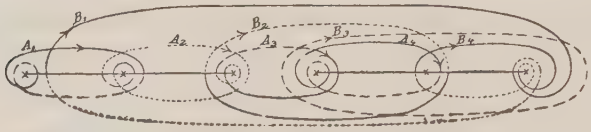
Die Riemannsche Fläche für

$$y^3 = f_6(x)$$

fasse ich als 3-fach überdeckte x-Ebene auf, deren Blätter je sämmtlich in den 6 im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten

$$f_6(x) = 0$$

zusammenhängen. Die 6 Verzweigungspunkte lassen sich dann zweckentsprechend zu je 3 durch Verzweigungsschnitte mit einander verbinden, wobei denn die Blätter so an denselben zusammenhängen, wie in der Zeichnung angedeutet ist.



Da nun ein Querschnitt auf der vorliegenden Fläche immer mindestens 3 Umkreisungen im Verzweigungspunkte machen muss, ist wohl die einfachste canonische Zerschneidung diejenige, welche durch die Figur dargestellt ist. Darin sollen sich die ausgezogenen Curven auf das erste Blatt, die punktierten auf das zweite Blatt, die gestrichelten auf das dritte Blatt beziehen.

Die Integrale I. Gattung sind hier:

$$w_1 = \int \frac{dx}{y},\ w_2 = \int \frac{dx}{y^2},\ w_3 = \int \frac{xdx}{y^2},\ w_4 = \int \frac{x^2dx}{y^2}.$$

Der Periodicitätsmodul von w_α am i-ten Querschnitt erster bez. zweiter Art (A_i bez. B_i) soll mit

$$\omega_{\alpha,i} \text{ bez. } \omega_{\alpha,i+4}$$

bezeichnet werden.

Unterwirft man jetzt die Riemannsche Fläche der Transformation:

$$y' = \varepsilon y,$$

welche die Blätter 1, 2, 3 in 2, 3, 1 überführt, so geht diese Zerschneidung in eine neue über, derart dass die neuen Querschnitte die alten genau überdecken, indem sie um je ein Blatt im Cyclus weiter gerückt sind. Hiernach lassen sich die Periodicitätsmoduln der alten Integrale w_α an den neuen Querschnitten

$\omega'_{\alpha,i}$ bez. $\omega'_{\alpha,i+4}$

unmittelbar als Summen von ganzzahligen Multiplen der alten Periodicitätsmoduln $\omega_{\alpha,i}$, $\omega_{\alpha,i+4}$ ausdrücken; man erhält:

$$\begin{aligned}
\omega'_{\alpha,1} &= -\omega_{\alpha,1} - \omega_{\alpha,5} + \omega_{\alpha,7} - \omega_{\alpha,8} \\
\omega'_{\alpha,2} &= -\omega_{\alpha,2} - \omega_{\alpha,7} + \omega_{\alpha,8} \\
\omega'_{\alpha,3} &= -\omega_{\alpha,3} + \omega_{\alpha,5} - \omega_{\alpha,6} \\
\omega'_{\alpha,4} &= -\omega_{\alpha,4} - \omega_{\alpha,5} + \omega_{\alpha,6} - \omega_{\alpha,8} \\
\omega'_{\alpha,5} &= \omega_{\alpha,1} + \omega_{\alpha,2} \\
\omega'_{\alpha,6} &= \omega_{\alpha,1} + \omega_{\alpha,2} + \omega_{\alpha,3} \\
\omega'_{\alpha,7} &= \omega_{\alpha,2} + \omega_{\alpha,3} + \omega_{\alpha,4} \\
\omega'_{\alpha,8} &= \omega_{\alpha,3} + \omega_{\alpha,4}
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich zunächst solche Beziehungen zwischen den Moduln des algebraischen Gebildes, welche die Specializierung desselben herbeiführt. Es ist nämlich $\omega'_{\alpha,j}$ $(j = 1, 2, \ldots 8)$ nichts anderes als $\eta_{i\alpha}\omega_{\alpha,j}$ $(\eta_{i_1} = \varepsilon^2;$ $\eta_{i_2}, \eta_{i_3}, \eta_{i_4} = \varepsilon)$; daher stellen sich folgende Relationen heraus:

$$\begin{aligned}
\eta_i\omega_{\alpha,5} &= \omega_{\alpha,1} + \omega_{\alpha,2} \\
\eta_i\omega_{\alpha,6} &= \omega_{\alpha,1} + \omega_{\alpha,2} + \omega_{\alpha,3} \\
\eta_i\omega_{\alpha,7} &= \omega_{\alpha,2} + \omega_{\alpha,3} + \omega_{\alpha,4} \\
\eta_i\omega_{\alpha,8} &= \omega_{\alpha,3} + \omega_{\alpha,4}
\end{aligned}$$

während die 4 weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\eta_i\omega_{\alpha,1} &= -\omega_{\alpha,1} - \omega'_{\alpha,5} + \omega_{\alpha,7} - \omega_{\alpha,8} \\
\eta_i\omega_{\alpha,2} &= -\omega_{\alpha,2} - \omega_{\alpha,7} + \omega_{\alpha,8} \\
\eta_i\omega_{\alpha,3} &= -\omega_{\alpha,3} + \omega_{\alpha,5} - \omega_{\alpha,6} \\
\eta_i\omega_{\alpha,4} &= -\omega_{\alpha,4} - \omega_{\alpha,5} + \omega_{\alpha,6} + \omega_{\alpha,8}
\end{aligned}$$

nur identische Folgen dieser 4 werden.

Obige Gleichungen geben auch ferner Aufschluss über die Coefficienten der Characteristikentransformation (vgl. Noether, Zum Umkehrproblem etc. § 6). Waren $m_1 \ldots m_4$, $n_1 \ldots n_4$ die Elemente einer Characteristik α, so werden die Elemente $m'_1 \ldots m'_4$, $n'_1 \ldots n'_4$ derjenigen Characteristik α', in welche α

durch die Periodentransformation übergeführt wurde, durch die Congruenzen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} m_1' &\equiv m_1 + n_1 + n_3 + n_4 + 1 \\ m_2' &\equiv m_2 + n_3 + n_4 \\ m_3' &\equiv m_3 + n_1 + n_2 \\ m_4' &\equiv m_4 + n_1 + n_2 + n_4 + 1 \\ n_1' &\equiv m_1 + m_2 \\ n_2' &\equiv m_1 + m_2 + m_3 \\ n_3' &\equiv m_2 + m_3 + m_4 \\ n_4' &\equiv m_3 + m_4 \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

Es ist also α' die Characteristik im neuen Querschnittsysteme von demjenigen Berührungssystem X_α, welches im alten Querschnittsysteme die Characteristik α hatte. Kehrt man diese Transformation um, oder, was dasselbe ist, macht man diese Transformation zweimal, wodurch man von α auf α'' komme, so erhält man in α'' die Characteristik im alten Querschnittsysteme desjenigen Berührungssystems X, welches durch die einmalige Transformation, $y' = \varepsilon y$, aus dem alten X_α hervorging.

Für die Elementarcharacteristiken gelten genau dieselben Congruenzen wie oben, nur dass aus der ersten und vierten die 1 fortfällt.

Zur Darstellung einer Characteristik bediene ich mich nun folgender Schreibweise: ich setze

$$[\rho_1] = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0000 \end{bmatrix}, [\rho_2] = \begin{bmatrix} 0100 \\ 0000 \end{bmatrix}, [\rho_3] = \begin{bmatrix} 0010 \\ 0000 \end{bmatrix}, [\rho_4] = \begin{bmatrix} 0001 \\ 0000 \end{bmatrix},$$

$$[\sigma_1] = \begin{bmatrix} 0000 \\ 1000 \end{bmatrix}, [\sigma_2] = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0100 \end{bmatrix}, [\sigma_3] = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0010 \end{bmatrix}, [\sigma_4] = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0001 \end{bmatrix},$$

$$[\rho_i \sigma_i] = [\tau_i], \ (g) = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0000 \end{pmatrix}$$

$$(g)[\rho_i] = (g\rho_i) \text{ u. s. w.},$$

wobei die eckigen bez. runden Klammern die darin stehenden Ausdrücke als Elementar- bez. Primcharacteristiken bezeichnen sollen. Durch Combination der $[\rho]$, $[\sigma]$, $[\tau]$, $[g]$ lässt sich dann jede Characteristik darstellen. Dabei wird immer ein Paar $\rho_i \sigma_i$ zu τ_i zusammengezogen; ferner ist das Zeichen g explicit in allen Primcharacteristiken enthalten, dagegen in keiner Elementarcharacteristik; und eine Primcharacteristik ist hier gerade oder ungerade, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von τ enthält.

Unterwirft man diese 13 Elemente der obigen cyclischen Transformation zweimal hintereinander, so erhält man:

$$
\begin{array}{ll}
[\rho_1'] = [\tau_1\sigma_2] & [\rho_1''] = [\sigma_1\sigma_2] \\
[\rho_2'] = [\sigma_1\tau_2\sigma_3] & [\rho_2''] = [\sigma_1\sigma_2\sigma_3] \\
[\rho_3'] = [\sigma_2\tau_3\sigma_4] & [\rho_3''] = [\sigma_2\sigma_3\sigma_4] \\
[\rho_4'] = [\sigma_3\tau_4] & [\rho_4''] = [\sigma_3\sigma_4] \\
 & \\
[\sigma_1'] = [\rho_1\rho_3\rho_4] & [\sigma_1''] = [\tau_1\rho_3\rho_4] \\
[\sigma_2'] = [\rho_3\rho_4] & [\sigma_2''] = [\sigma_2\rho_3\rho_4] \\
[\sigma_3'] = [\rho_1\rho_2] & [\sigma_3''] = [\rho_1\rho_2\sigma_3] \\
[\sigma_4'] = [\rho_1\rho_2\rho_4] & [\sigma_4''] = [\rho_1\rho_2\tau_4] \\
 & \\
[\tau_1'] = [\sigma_1\sigma_2\rho_3\rho_4] & [\tau_1''] = [\rho_1\sigma_2\rho_3\rho_4] \\
[\tau_2'] = [\sigma_1\tau_2\tau_3\rho_4] & [\tau_2''] = [\sigma_1\tau_3\rho_4] \\
[\tau_3'] = [\rho_1\tau_2\tau_3\sigma_4] & [\tau_3''] = [\rho_1\tau_2\sigma_4] \\
[\tau_4'] = [\rho_1\rho_2\sigma_3\sigma_4] & [\tau_4''] = [\rho_1\rho_2\sigma_3\rho_4] \\
 & \\
(g') = (g\rho_1\rho_4) & (g'') = (g\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4).
\end{array}
$$

Mit Hilfe dieser Formeln berechnet man nun leicht die beiden Primcharacteristiken, in welche die cyclische Transformation irgend eine vorgegebene Characteristik successiv überführt, und solche 3 Characteristiken bilden dann einen Cyclus. Zu der näheren Betrachtung solcher Cyclen gehe ich jetzt über, wobei sich zeigen wird, dass von sämmtlichen Prim-

characteristiken nur eine einzige und zwar eine von (g) verschiedene gerade Characteristik ausgezeichnet ist.

§ 9.

Die 40 Cyclen ungerader Characteristiken.

Wendet man die cyclische Transformation des vorigen § auf irgend eine der 120 ungeraden Primcharacteristiken an, so sieht man, dass dieselbe immer in eine andere ungerade Characteristik übergeht, und zwar so dass hier eine Einteilung der 120 in 40 Cyclen von je 3 wirklich stattfindet (vgl. Tabelle I). Dagegen findet sich unter den 136 geraden Primcharacteristiken eine und nur eine, welche bei dieser Transformation in sich selbst übergeht, während sämmtliche andere sich zu 45 Cyclen von je 3 zusammenordnen (vgl. Tabelle II). Dieś war vorauszusehen, da unter den Berührungscurven $X^{(1)}$ nur eine uneigentliche

$$X^{(1)} = (x - x_0)^2,$$

wo x_0 beliebig, existierte, der eben $(h) = (g\tau\,\sigma_2\,\sigma_3\,\tau_4)$ zugeordnet ist. Im Uebrigen ist die Summe dreier Characteristiken, welche zusammen einen Cyclus, sei er gerade oder sei er ungerade, bilden, immer gleich (h).

Die 40 Cyclen bei Auszeichnung eines derselben. Ich gehe jetzt zu der Behandlung der 40 ungeraden Cyclen. Dabei zeichne ich vor allen Dingen irgend einen beliebigen, etwa den Cyclus

$$(g\tau_1)\,(g\tau_1\,\sigma_2\,\rho_3)\,(g\tau_1\tau_3\,\tau_4) \qquad (a)$$

aus, indem ich denselben zunächst als völlig bekannt annehme, und untersuche dann das Verhalten der übrigen 39 gegen diesen. Dies geschieht ausschliesslich vermöge des § 6 angeführten invarianten Kriteriums. Man wird also einen dieser 39, etwa

$$(g\tau_1\tau_2\tau_3)\,(g\sigma_2\rho_3\tau_4)\,(g\tau_2) \qquad (b)$$

herausgreifen und dessen Charakteristiken mit den Characteristiken von (a), wie folgt, verbinden: man bilde zunächst aus (h) und den Characteristiken von (a) die 3 Elementarcharacteristiken:

$(h)\,(g\tau_1) = [\sigma_2\sigma_3\tau_4]$, $(h)\,(g\tau_1\sigma_2\rho_3) = [\tau_3\tau_4]$, $(h)\,(g\tau_1\tau_3\tau_4) = [\sigma_2\rho_3]$;

diese addiere man jetzt successiv zu den 3 Characteristiken von (b), wodurch dann folgende 9 neue Primcharacteristiken hervortreten:

$$\left.\begin{array}{lll} (g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4), & (g\tau_3), & (g\rho_2\sigma_3\tau_4) \\ (g\tau_1\tau_2\tau_4), & (g\sigma_2\sigma_3), & (g\tau_2\tau_3\tau_4) \\ (g\tau_1\rho_2\sigma_3), & (g\tau_4), & (g\rho_2\rho_3) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

Die 2te und 3te Zeile geht durch die cyclische Transformation aus der ersten hervor, wie es ja auch wegen deren Entstehungsweise der Fall sein muss.

Das Bilden eines solchen Complexes aus (h) und 2 Cyclen bezeichne ich für die Folge als Combination der beiden Cyclen.

Man sieht zunächst aus dem Complex (c), dass die Characteristik $(g\tau_1\tau_2\tau_3)$ in (b) sich anders gegen die Characteristiken $(g\tau_1)$ in (a) verhält (natürlich immer unter Berücksichtigung der Sonderstellung von (h)), wie gegen die beiden anderen, $(g\tau_1\sigma_2\rho_3)$ und $(g\tau_1\tau_3\tau_4)$; sie wird daher jener zugeordnet; und gleichfalls sind $(g\sigma_2\rho_3\tau_4)$, $(g\tau_2)$ bez. $(g\tau_1\sigma_2\rho_3)$, $(g\tau_1\tau_3\tau_4)$ zugeordnet. Ferner bestehen die 9 Characteristiken von (c) aus einem geraden Cyclus:

$$(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_2\sigma_3)\,(g\rho_2\rho_3), \qquad (d)$$

von welchem später noch die Rede sein wird, und aus 2 neuen ungeraden Cyclen:

$$(g\tau_2\tau_3\tau_4)\,(g\tau_1\rho_2\sigma_3)\,(g\tau_3) \qquad (e)$$

und

$$(g\tau_4)\,(g\rho_2\sigma_3\tau_4)\,(g\tau_1\tau_2\tau_4) \qquad (f)$$

Auf Grund dessen sage ich: der Cyclus (b) ist in Bezug auf (a) ein Cyclus erster Art. Der Cyclus (e) hat nun die Eigenschaft, dass, wenn man (e) statt des Cyclus (b) auf sein Verhalten gegen (a) untersucht, derselbe ebenfalls von erster Art gegen (a) wird, und zweitens auf die beiden Cyclen (b) und (f) führt; ebenso führt (f) auf (b) und (e). Man hat somit, (a) gegenüber, 3 zusammengehörige Cyclen (b), (e), (f), welche ich als Tripel erster Art in Bezug auf (a) bezeichne.

Hätte man dagegen statt (b) etwa den Cyclus

$$(g\tau_1\sigma_3)\,(g\sigma_1\tau_2\rho_3)\,(g\sigma_1\rho_2\rho_3\tau_4) \qquad (b')$$

herausgewählt und wäre man dann genau in derselben Weise vorgegangen wie früher, so erhielte man folgenden Complex:

$$\left.\begin{array}{lll} (g\tau_1\sigma_2\tau_4), & (g\sigma_1\rho_2\tau_3\tau_4), & (g\sigma_1\tau_2\tau_3), \\ (g\tau_1\rho_3\tau_4), & (g\sigma_1\tau_2\sigma_3\tau_4), & (g\sigma_1\rho_2\sigma_3), \\ (g\tau_1\sigma_2\tau_3), & (g\sigma_1\rho_2), & (g\sigma_1\tau_2\tau_4). \end{array}\right\} \qquad (c')$$

Sämmtliche 9 Characteristiken sind hier gerade. Auf Grund dessen sage ich: der Cyclus (b') ist in Bezug auf (a) ein Cyclus zweiter Art. Die Zuordnung der einzelnen Characteristiken in (b') zu den Characteristiken von (a) hört hier auf, sowie auch die frühere Entstehungsweise eines Tripels.

Gruppierung zu Tripeln. Die Rechnung ergiebt nun, dass jeder der 39 Cyclen sich in Bezug auf (a) entweder wie ein Cyclus erster oder wie ein Cyclus zweiter Art verhält, und zwar: es giebt 27 Cyclen erster Art, also 9 Tripel erster Art; und 12 Cyclen zweiter Art.

Bei den 27 Cyclen erster Art sind auch die einzelnen Characteristiken je den einzelnen Characteristiken von (a) zugeordnet, während bei den 12 Cyclen zweiter Art dies nicht statthat.

Zwischen den 9 Tripeln erster Art bestehen dann auch noch Beziehungen, welche jetzt untersucht werden sollen. Zu dem Zwecke nehme man irgend ein Tripel, etwa 1 (s. Tabelle I) als bekannt heraus und erforsche dann die Beziehung irgend eines zweiten Tripels, etwa 2, zu 1, indem man zunächst den ersten Cyclus von 2 je mit den drei Cyclen von 1 combiniert (s. o.); dies liefert folgende Complexe:

$$\left.\begin{array}{lll} (g\rho_1\rho_2\rho_3), & (g\tau_1\sigma_2\tau_3), & (g\rho_1\rho_3), \\ (g\sigma_1\tau_3\tau_4), & (g\tau_2\rho_3\tau_4), & (g\sigma_1\rho_2\tau_3\tau_4), \\ (g\sigma_1\rho_2\sigma_3), & (g\sigma_2), & (g\sigma_1\sigma_3); \end{array}\right\} \quad (\mathfrak{c}_1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} (g\sigma_1\rho_2\rho_3\tau_4), & (g\sigma_2\tau_3\tau_4), & (g\sigma_1\rho_3\tau_4), \\ (g\rho_1\tau_2), & (g\tau_1\sigma_3), & (g\rho_1\sigma_2), \\ (g\sigma_1\sigma_2\rho_3), & (g\rho_2\tau_3), & (g\sigma_1\tau_2\rho_3); \end{array}\right\} \quad (\mathfrak{c}_2)$$

$$\left.\begin{array}{lll} (g\sigma_1\sigma_2\sigma_3\tau_4), & (g\rho_2\tau_4), & (g\sigma_1\tau_2\sigma_3\tau_4), \\ (g\sigma_1\tau_2\tau_4), & (g\sigma_3\tau_4), & (g\sigma_1\sigma_2\tau_4), \\ (g\rho_1\rho_2\sigma_3\tau_4), & (g\tau_1\sigma_2\tau_4), & (g\rho_1\sigma_3\tau_4). \end{array}\right\} \quad (\mathfrak{c}_3)$$

Daraus folgt zunächst, dass 2_1 (unter k_i den i-ten Cyclus des k-ten Tripels verstanden) in Bezug auf 1_1 ein Cyclus zweiter Art, dagegen in Bezug auf 1_2, 1_3 ein Cyclus erster Art ist. Auf Grund dessen wird 2_1 dem Cyclus 1_1 zugeordnet. Es kommen ferner in $(\mathfrak{c}_2)$ und $(\mathfrak{c}_3)$ resp. die Cyclen 3_3

$$(g\tau_1\sigma_3)\,(g\sigma_1\tau_2\rho_3)\,(g\sigma_1\rho_2\rho_3\tau_4) \qquad (\mathfrak{g}_2)$$

und 3_2,

$$(g\sigma_3\tau_4)\,(g\rho_1\sigma_3\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\sigma_3\tau_4) \qquad (\mathfrak{g}_3)$$

vor, also in Bezug auf (a) je ein Cyclus erster und einer zweiter Art. Untersucht man jetzt das Verhalten der beiden anderen Cyclen 2_2 und 2_3 in Bezug auf die Cyclen von 1, so findet man, dass ebenso 2_2 dem 1_2, 2_3 dem 1_3 zugeordnet

sind, während dabei 2_2 von 3_1, 3_3, $(\mathfrak{g}_2)$ und $(\mathfrak{g}_3)$, 2_3 von 3_1, $_2$, $(\mathfrak{g}_2)$ und $(\mathfrak{g}_3)$ begleitet wird. Die Tripel 1 und 2 führen daher auf das Tripel 3, und zwar gleichgültig, ob, wie hier, von 1 oder von 2 ausgegangen wird; es zeigt sich ferner, dass auch 3 und 1 auf 2, sowie 3 und 2 auf 1 führen. 3 Tripel, welche diese Eigenschaft aufweisen, bezeichne ich als 3 conjugierte Tripel. Es ergiebt sich, dass man von irgend 2 der 9 Tripel erster Art ausgehend, auf diese Weise zu einem dritten dieser Tripel gelangt: Man kann daher die 9 Tripel auf 12 verschiedene Weisen zu je 3 conjugierten Tripeln zusammenordnen, d.h. die 9 Tripel führen auf eine Hessesche Gleichung 9ten Grades.

Es schlossen sich dem System von 3 conjugierten Tripeln 1, 2, 3 zwei Cyclen zweiter Art $(\mathfrak{g}_2)$ und $(\mathfrak{g}_3)$ an. Fasst man nun ein zweites System von 3 conjugierten Tripeln, in welchem 1, 2, 3 nicht vorkommen, etwa 4, 5, 6 ins Auge, so findet man, dass zu ihm die beiden Cyclen zweiter Art, $(\mathfrak{g}_3)$ und

$$(g\sigma_1\tau_2\sigma_4)\,(g\tau_1\sigma_2\sigma_3)\,(g\sigma_1\tau_2\rho_4), \qquad (\mathfrak{g}_1)$$

sowie endlich zu dem übrigen conjugierten System 7, 8, 9, die beiden Cyclen zweiter Art, $(\mathfrak{g}_1)$ und $(\mathfrak{g}_2)$ in derjenigen Beziehung stehen, wie $(\mathfrak{g}_2)$ und $(\mathfrak{g}_3)$ zu 1, 2, 3. Unter den 12 Cyclen zweiter Art befinden sich also 3, nämlich $(\mathfrak{g}_1)$, $(\mathfrak{g}_2)$, $(\mathfrak{g}_3)$, welche sich dieser Zerlegung der 9 Tripel erster Art in 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, anschliessen, und zwar durch dieselbe eindeutig bestimmt werden. Ueberdies verhält sich z. B. $(\mathfrak{g}_1)$ anders gegen das conjugierte System 1, 2, 3 wie gegen die anderen, 4, 5, 6 und 7, 8, 9, so dass auch eine Zuordnung der einzelnen Cyclen, $(\mathfrak{g}_1)$, $(\mathfrak{g}_2)$, $(\mathfrak{g}_3)$ resp. zu den conjugierten Systemen 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9 eintritt.

Anordnung der 27 Cyclen erster Art. In der Tabelle I sind die Characteristiken jedes der 27 Cyclen nach

denen von (a) geordnet und die Tripel $1, 2, .. 9$ angegeben. Die Cyclen innerhalb eines jeden Tripels sind ferner nach denen des Tripels 1 geordnet. Es fragt sich nun, wie sich, wenn an Stelle des Tripels 1 von dem Tripel 2 ausgegangen wird, die Cyclen der anderen Tripel denen von 2 zuordnen. Man sieht sofort, dass die Cyclen von 1 den Cyclen von 2 ebenso zugeordnet sein müssen, wie früher den Cyclen von 1 die Cyclen von 2. Alsdann findet man, indem man nachrechnet, dass auch die Zuordnung der Cyclen von 3 erhalten bleibt. Die Zuordnung der Cyclen der 3 conjugierten Tripel, welche durch 1 und 2 bestimmt werden, $1, 2, 3$, erleidet also dabei keine Veränderung. Wenn man dagegen etwa das conjugierte System $2, 4, 9$ betrachtet, so stellt sich heraus, dass die Cyclen von 4 und 9 ($4_1, 4_2, 4_3$; $9_1, 9_2, 9_3$) die beiden verschiedenen cyclischen Vertauschungen ihrer Indices erfahren — welche dieser Vertauschungen 4 und welche 9 erfährt, muss aber wirklich einmal ausgerechnet werden.

Das sind die Sätze, welche Clebsch in § 9 d. o. c. Abh. ableitet, und welche zu der völligen Bestimmung der neuen Zuordnung reichen. Es finden sich dort auch die wirklichen Zuordnungen ausgerechnet, wenn statt 1 eins der 8 übrigen Tripel den Ausgang bildet. So wäre etwa für 2 die Zuordnung folgende:

$$\begin{array}{lll} 1_1\,1_2\,1_3 & 4_2\,4_3\,4_1 & 7_3\,7_1\,7_2 \\ 2_1\,2_2\,2_3 & 5_2\,5_3\,5_1 & 8_3\,8_1\,8_2 \\ 3_1\,3_2\,3_3 & 6_2\,6_3\,6_1 & 9_3\,9_1\,9_2 \end{array}$$

Die gegenseitige Gruppierung der 40 Cyclen. Man kann nun ferner fragen, wie sich die Gruppierung ändert, wenn statt des Cyclus (a) irgend einer der übrigen 39 ausgezeichnet wird.

1) Sei einer der 27 Cyclen erster Art, etwa $1_1 = (a')$ der neu Ausgezeichnete. Alsdann ergiebt die Rechnung

(vgl. Complexe $(c_1), (c_2), (c_3)$), dass $(a), 1_2, 1_3$ auch noch ein Tripel in Bezug auf (a') bilden; aus den übrigen 8 Tripeln erster Art werden die 8 Cyclen k_1 zu Cyclen zweiter Art in Bezug auf (a'), während die k_2, k_3 auch in Bezug auf (a') Cyclen erster Art bleiben. Denn der Grund der Zuordnung von k_1 zu 1_1 war ja eben das Verhalten zweiter Art. Fasse man nun irgend ein System von 3 conjugierten Tripeln, in welchem 1 vorkommt, etwa $1, 2, 3$ näher ins Auge. Dasselbe bestimmte den Cyclus zweiter Art (g_1), welcher übrigens auch in Bezug auf 1_1 ein Cyclus zweiter Art ist, so dass derselbe noch unter den 12 bleibt. Dagegen bilden $(g_2), 2_3, 3_2$, sowie $(g_3), 2_2, 3_3$ in Bezug auf (a') ein Tripel erster Art. Die 3 eben angeschriebenen Tripel bilden in Bezug auf (a') ein conjugiertes System. Das analoge gilt nun auch für jedes conjugierte System von 3 Tripeln, in welchem 1 vorkommt, und hiermit ist der Uebergang von (a) zu einem Cyclus (a'), erster Art in Bezug auf (a), ermittelt. (Clebsch, § 13).

2) Um nun einzusehen, was geschieht, wenn (a) mit einem Cyclus zweiter Art in Bezug auf (a) vertauscht wird, stelle man folgende Ueberlegung an. Sei angenommen, (a) werde mit (g_1) vertauscht. In Bezug auf jeden Cyclus der 3 conjugierten Tripel, $1, 2, 3$ ist (g_1) ein Cyclus zweiter Art; ebenso in Bezug auf die beiden anderen Cyclen (g_2) und (g_3) seines eigenen Tripels zweiter Art, und endlich noch in Bezug auf (a) selbst. Hiermit hat man bereits die 12 Cyclen zweiter Art, und zugleich also auch die 27 Cyclen erster Art, in Bezug auf (g_1). Auf die Gruppierung derselben gegen einander werde ich nicht näher eingehen.

§ 10.

Uebergang zu den 45 Cyclen gerader Characteristiken.

Die Quadrupel. Man findet, dass 4 Cyclen, welche

aus einem beliebigen der 40 ungeraden und den 3 Cyclen irgend eines der 9 Tripel erster Art in Bezug auf denselben gebildet wird, durchgängig Cyclen erster Art in Bezug auf einander werden, und zwar giebt es keinen weiteren Cyclus mehr, der nicht wenigstens gegen einen dieser 4 Cyclen von der zweiten Art ist. Solche 4 Cyclen bezeichne ich als ein Quadrupel erster Art. Deren giebt es im Ganzen $\frac{40 \cdot 9}{4} = 90$; dieselben ordnen sich aber paarweise zusammen, indem jedes ein zweites eindeutig bestimmt. In Bezug auf (a), $1_1, 1_2, 1_3$ waren nämlich die Cyclen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_1'', \mathfrak{g}_1'''$ (vgl. Tabelle I) durchgängig Cyclen zweiter Art, und zwar waren damit, wie man leicht sieht, sämmtliche der 36 übrigen Cyclen erschöpft, welche diese Eigenschaft besitzen. Ferner waren letztere 4 Cyclen durchgängig von der ersten Art gegen einander, sie bilden darum ebenfalls ein Quadrupel erster Art, und dies ist nun das zweite Quadrupel, welches sich zu dem Quadrupel (a), $1_1, 1_2, 1_3$ gesellt. Es giebt 45 Quadrupelpaare.

Der gerade Cyclus (b) im vorigen § stellt sich bei jeder Combination der Cyclen (a), $1_1, 1_2, 1_3$ unter sich, sowie der Cyclen $(\mathfrak{g}_1), (\mathfrak{g}_1'), (\mathfrak{g}_1''), (\mathfrak{g}_1''')$ unter sich immer wieder ein, und von geraden Cyclen nur dieser; daraus schliesst man, dass jedes Quadrupelpaar eindeutig auf einen der 45 geraden Cyclen führt. Wie man alle 45 Quadrupelpaare wirklich ausfindig macht, hat Clebsch in § 14 d. o. c. Abh. ausführlich gezeigt, um dann noch die Frage aufzuwerfen und zu beantworten, auf wie viele Weisen sich die 40 Cyclen zu 5 Quadrupelpaaren zusammenfassen lassen; da stellte sich heraus: es ist auf 27 Arten möglich, die 40 Cyclen in 5 Quadrupelpaare zu ordnen.

Analog diesen Quadrupeln erster Art giebt es auch andere Vierersysteme ungerader Cyclen, welche so beschaffen sind,

dass jeder ihrer Cyclen in Bezug auf jeden anderen ein Cyclus zweiter Art ist, während keiner der übrigen 36 diese Eigenschaft teilt. Ein solches Vierersystem bezeichne ich als ein Quadrupel zweiter Art. Beispiele dieser Quadrupel liefert (a) verbunden mit einem Tripel zweiter Art:

$$(a, g_1, g_2, g_3), \quad (a, g_1', g_2', g_3'), \text{ u. s. w.,}$$

und zwar beteiligt sich jeder ungerade Cyclus in 4 solchen Quadrupeln; daraus folgt: Es giebt $\frac{4 \cdot 40}{4} = 40$ Quadrupel zweiter Art.

§ 11.

Die 45 Cyclen gerader Characteristiken.

Verhalten der Cyclen gegen einen derselben. Bei den geraden Cyclen existiert auch eine analoge Einteilung wie bei den ungeraden, wenn man einen derselben auszeichnet und dann das Verhalten der anderen 44 gegen diesen untersucht.

Sei der Cyclus

$$(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_2\sigma_3)\,(g\rho_2\rho_3) \qquad (a)$$

als bekannt angenommen. Combiniert man nun mit diesem Cyclus einen der übrigen, etwa

$$(g\rho_1)\,(g\sigma_1\sigma_2\rho_4)\,(g\sigma_3\sigma_4), \qquad (b)$$

so erhält man den Complex:

$$\left.\begin{array}{lll} (g\rho_1\tau_2\tau_3), & (g\sigma_1\rho_2\tau_3\rho_4), & (g\tau_2\rho_3\sigma_4), \\ (g\sigma_1\tau_4), & (g\rho_1\sigma_2\sigma_4), & (g\tau_1\sigma_3\rho_4), \\ (g\sigma_1\tau_2\tau_3\tau_4), & (g\rho_1\rho_2\tau_3\sigma_4), & (g\tau_1\tau_2\rho_3\rho_4). \end{array}\right\} \qquad (c)$$

Derselbe enthält zunächst den anderen geraden Cyclus:

$$(g\rho_1\tau_2\tau_3)\,(g\rho_1\sigma_2\sigma_4)\,(g\tau_1\tau_2\rho_3\rho_4) \qquad (d)$$

Dieser Cyclus hat aber die Eigenschaft, dass er, mit (a) bez.

(b) combiniert, wieder auf (b) bez. (a) führt. Zwei solche Cyclen wie (b) und (d) bezeichne ich als ein conjugiertes Paar (von Cyclen erster Art) in Bezug auf (a), während ich solche 3 Cyclen wie (a), (b), (d) mit dem Namen Trieder belege. Des Weiteren lassen sich vermöge (c) die einzelnen Characteristiken von (b) den einzelnen Characteristiken von (a) zuordnen.

Wenn man dagegen etwa den Cyclus

$$(g\rho_1\sigma_4)\,(g\tau_1\tau_2)\,(g\rho_1\rho_2\sigma_3\rho_4) \qquad (b')$$

mit (a) combiniert, erhält man folgenden Complex:

$$\left.\begin{array}{lll} (g\rho_1\tau_2\tau_3\sigma_4), & (g\tau_1\tau_3), & (g\rho_1\sigma_2\rho_3\rho_4), \\ (g\sigma_1\rho_4), & (g\tau_2\tau_4), & (g\sigma_1\rho_2\sigma_3\sigma_4), \\ (g\sigma_1\tau_2\tau_3\rho_4), & (g\tau_3\tau_4), & (g\sigma_1\sigma_2\rho_3\sigma_4). \end{array}\right\} \qquad (c')$$

Es zeigt sich ferner, dass je einer der 4 Cyclen, (b') und der 3 in (c') vorkommenden Cyclen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} (g\rho_1\sigma_4)\,(g\tau_1\tau_2)\,(g\rho_1\rho_2\sigma_3\rho_4) \\ (g\rho_1\tau_2\tau_3\sigma_4)\,(g\tau_2\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\rho_3\sigma_4) \\ (g\tau_1\tau_3)\,(g\sigma_1\rho_2\sigma_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\tau_2\tau_3\rho_4) \\ (g\rho_1\sigma_2\rho_3\rho_4)\,(g\sigma_1\rho_4)\,(g\tau_3\tau_4). \end{array}\right\} \qquad (e)$$

mit (a) combiniert, auf die 3 anderen führt. Diese 4 Cyclen sind zweiter Art in Bezug auf (a). Durch Rechnung gelangt man nun zu dem folgenden Resultat: Bei Auszeichnung eines der 45 geraden Cyclen zerfallen die übrigen in 32 erster und 12 zweiter Art; erstere ordnen sich zu 16 conjugierten Paaren, letztere zu 3 Vierersystemen.

Bei den 32 Cyclen lassen sich auch die einzelnen Characteristiken den einzelnen Characteristiken von (a) zuordnen, während bei den 12 dies nicht mehr statthat (vgl. Tabelle II).

Trieder und Doppeltrieder. Analog den früheren

Quadrupelpaaren des § 10 giebt es hier, und zwar auf genau denselben Grund hin wie damals, Doppeltrieder. Zwei Trieder, welche die Eigenschaft haben, dass jeder Cyclus des einen in Bezug auf jeden Cyclus des anderen zweiter Art ist, bezeichne ich als ein Doppeltrieder. Es zeigt sich, dass jedes Trieder einem einzigen Doppeltrieder angehört.

Neunersysteme. Dem ungeraden Cyclus (a) müssen, indem er in 9 Quadrupelpaaren beteiligt ist, 9 gerade Cyclen entsprechen, und zwar sind diese 9 folgende:

$$(a) \text{ und die conjugierten Paare } 5, 8, 9, 15. \qquad (f)$$

Solche 9 Cyclen werden nun, wie man sich leicht überzeugt, durch die Eigenschaft bezeichnet, dass jeder derselben in Bezug auf einen jeden der 8 übrigen von der ersten Art ist, während jeder der übrigen 36 Cyclen wenigstens in Bezug auf einen der 9 von der zweiten Art ist. Es handelt sich nun darum, von einem solchen Neunersystem gerader Characteristiken ausgehend, auf den durch dasselbe bestimmten ungeraden Cyclus zu kommen. Dies geschieht folgendermassen. An dem obigen Neunersysteme (f) weist man zunächst durch Combination leicht nach, dass sich die 9 Cyclen desselben wie die Wurzeln einer Hesseschen Gleichung verhalten. Alsdann betrachte man eins der 4 überhaupt möglichen Systeme von 3 Triedern, welches sich aus den Cyclen von (f) bilden lässt, etwa

$$[(a), 15_1, 15_2], \quad [5_1, 8_2, 9_1], \quad [5_2, 8_1, 9_2]$$

(unter k_i den i-ten Cyclus im k-ten Paare der Tabelle II verstanden), und füge man dann jedem dieser 3 Trieder sein conjugiertes Trieder zu:

$$
\left.\begin{array}{l}
(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_2\sigma_3)\,(g\rho_2\rho_3) \\
(g\rho_1\rho_2\rho_3)\,(g\tau_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_3) \\
(g\rho_1\sigma_2\sigma_3)\,(g\tau_1\tau_2\rho_3)\,(g\rho_1\tau_2\rho_3\tau_4)
\end{array}\right\}\ (\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(g\tau_1\tau_3)\,(g\sigma_1\rho_2\sigma_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\tau_2\tau_3\rho_4) \\
(g\sigma_1\rho_2\rho_3\rho_4)\,(g\sigma_1\rho_2\sigma_3\rho_4)\,(g\tau_1\sigma_2\rho_3\tau_4) \\
(g\tau_1\tau_4)\,(g\sigma_1\tau_2\tau_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\rho_2\rho_3\sigma_4)
\end{array}\right\}\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(g\tau_1\tau_2\sigma_4)\,(g\sigma_3)\,(g\rho_2\rho_4) \\
(g\tau_1\tau_2\rho_4)\,(g\rho_1\rho_2\sigma_4)\,(g\rho_1\sigma_3) \\
(g\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\,(g\rho_1\rho_2\rho_4)\,(g\rho_2\sigma_4)
\end{array}\right\}\ (\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_1)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(g\sigma_1\tau_2\tau_3)\,(g\tau_1\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_1\rho_2) \\
(g\sigma_1\rho_2\sigma_3)\,(g\tau_1\sigma_2\tau_3)\,(g\sigma_1\rho_2\tau_3\tau_4) \\
(g\sigma_1\tau_2\tau_4)\,(g\tau_1\sigma_2\tau_4)\,(g\sigma_1\tau_2\sigma_3\tau_4)
\end{array}\right\}\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_2)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(g\tau_1\tau_3\sigma_4)\,(g\tau_1\sigma_3\tau_4)\,(g\tau_1\sigma_2\tau_3\sigma_4) \\
(g\tau_1\tau_3\rho_4)\,(g\sigma_1\rho_2\rho_4)\,(g\sigma_1\tau_2\rho_3\tau_4) \\
(g\sigma_1\rho_2\rho_3)\,(g\sigma_1\rho_2\sigma_4)\,(g\tau_1\sigma_2\tau_3\rho_4)
\end{array}\right\}\ (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(g\sigma_1)\,(g\rho_3)\,(g\rho_1\sigma_2\tau_3\tau_4) \\
(g\sigma_1\tau_3\tau_4)\,(g\sigma_2)\,(g\rho_1\rho_3) \\
(g\sigma_1\sigma_2\rho_3)\,(g\sigma_2\tau_3\tau_4)\,(g\rho_1\sigma_2)
\end{array}\right\}\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_3)
$$

Jedes dieser 6 Trieder führt auf 2 ungerade Cyclen. Addiert man nämlich auf alle Weisen 3 Characteristiken, je eine aus jedem Cyclus eines der Trieder, so erhält man verschiedene Cyclen, unter welchen dann 2 und nur 2 ungerade Cyclen sich befinden. Die den Tridern je beigefügten Zeichen $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_k)$ bez. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i)$ zeigen an, auf welche 2 ungeraden Cyclen das betreffende Trieder führt. Man sieht nun zunächst, dass im Ganzen 4 verschiedene ungerade Cyclen, nämlich $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{g}_1)$, $(\mathfrak{g}_2)$, $(\mathfrak{g}_3)$ auftreten; unter denselben verhält sich aber $(\mathfrak{a})$ anders wie die $(\mathfrak{g})$, indem $(\mathfrak{a})$ sich stets zu einem der hinzugekommenen conjugierten Trieder gesellt. Ferner findet man durch

Rechnung, dass, wenn man von einem anderen System von 3 Triedern aus den 9 Cyclen (f) ausgegangen wäre, wobei natürlich andere conjugierte Trieder hinzugetreten wären, die 4 neuen ungeraden Cyclen wiederum aus (a), welcher nicht von der Stelle gerückt wäre, und $(\mathfrak{g}_1^i), (\mathfrak{g}_2^i), (\mathfrak{g}_3^i)$ bestanden hätten.

Hiermit ist klar, wie man den ungeraden Cyclus zu ermitteln hat, welcher einem Neunersysteme entspricht. Man teile die 9 Cyclen irgendwie in 3 Trieder, suche die den letzten conjugierten Trieder auf, und erforsche dann je die beiden ungeraden Cyclen, auf welche letztere Trieder führen; der Cyclus, welcher bei jedem der 3 Trieder vorkommt, ist dann der gesuchte, (in der Tabelle, (a)). Man sieht jetzt: Es giebt 40 Neunersysteme, eindeutig entsprechend den 40 ungeraden Cyclen.

Tripel von Doppeltrieder. In dem Bisherigen treten je die beiden Trieder der Doppeltrieder getrennt auf. Lässt man jetzt diese Trennung innerhalb des Doppeltrieders fallen, so hört die Auszeichnung eines der 4 ungeraden Cyclen, auf welche das Doppeltrieder führt, auf; jedes Trieder führt auf 4 gleichberechtigte ungerade Cyclen, so z. B. das erste der obigen Doppeltrieder auf die 2 gleichberechtigten Paare $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3)$, $(a, \mathfrak{g}_1)$. Die sämmtlichen Doppeltrieder lassen sich nun aber zu je 3 zusammenordnen, derart dass die 3 Doppeltrieder eines solchen Tripels auf die nämlichen 4 ungeraden Cyclen führen. Solche 4 Cyclen bilden nun ihrerseits ein System, welches § 10 als ein Quadrupel zweiter Art bezeichnet worden ist. Man kann die sämmtlichen Doppeltrieder gerader Cyclen auf 40 Weisen zu Tripeln ordnen. Dieselben sind den 40 Quadrupeln zweiter Art von ungeraden Cyclen eindeutig zugeordnet.

Quintupel. Der ausgezeichnete gerade Cyclus (a) und

die 4 Cyclen (e) zusammengenommen haben die Eigenschaft, dass jeder dieser 5 Cyclen in Bezug auf jeden anderen derselben ein Cyclus zweiter Art ist, während jeder der 40 übrigen mindestens in Bezug auf einen der 5 erster Art ist. 5 solche Cyclen bezeichne ich als ein Quintupel von geraden Cyclen. Deren giebt es $\frac{45 \cdot 3}{5} = 27$.

§ 12.

Die Zerlegungen der Elementarcharacteristiken.

In dem vorliegenden Falle zerfallen die 255 Elementarcharacteristiken zunächst in 120 erster und 135 zweiter Art, je nachdem in denselben (h) mit einer der 120 ungeraden bez. einer der 135 geraden Primcharacteristiken verbunden ist. Bei den 28 Zerlegungen in die Summe zweier ungerader Primcharacteristiken weisen nun die beiden Arten auch verschiedenes Verhalten auf. Sei nämlich $[A] = [\sigma_2 \sigma_3 \tau_4] = (h)(g\tau_1)$ als eine Characteristik erster Art angenommen. Dann ist vermöge (a) § 9 eine Zerlegung die:

$$[A] = (g\tau_1 \sigma_2 \rho_3)(g\tau_1 \tau_3 \tau_4).$$

Aus dem Tripel 1 folgen sodann die 3 weiteren Zerlegungen:

$$(g\sigma_2\rho_3\tau_4)(g\tau_3) = (g\tau_2)(g\rho_2\sigma_3\tau_4) = (g\tau_1\rho_2\sigma_3)(g\tau_1\tau_2\tau_4)$$

und in ähnlicher Weise entspringen aus jedem der 9 Tripel 3 solche Zerlegungen, womit die 27 übrigen Zerlegungen gegeben sind. Eine Zerlegung ist also den anderen gegenüber ausgezeichnet, indem die beiden Primcharacteristiken ein und demselben Cyclus angehören, und die übrigen 27 Zerlegungen sind den 27 ungeraden Cyclen erster Art in Bezug auf (a) eindeutig zugeordnet.

Betrachtet man dagegen eine Characteristik zweiter Art, etwa $[B] = [\tau_1 \tau_3] = (h)(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4)$ ((a) § 11), so findet man

zunächst aus dem Quadrupel (a), 1_1, 1_2, 1_3 folgende 6 Zerlegungen:

$$(g\tau_1)(g\tau_1\tau_2\tau_3) = (g\tau_1\sigma_2\rho_3)(g\tau_1\rho_2\sigma_3) = (g\tau_1\tau_3\tau_4)(g\tau_1\tau_2\tau_4)$$
$$= (g\sigma_2\rho_3\tau_4)(g\rho_2\sigma_3\tau_4) = (g\tau_2)(g\tau_3) = (g\tau_2\tau_3\tau_4)(g\tau_4)$$

und dann noch 6 aus dem conjugierten Quadrupel ($\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1'$, $\mathfrak{g}_1''$, $\mathfrak{g}_1'''$); die übrigen 16 sind: 1) entsprechende Characteristiken aus den Hauptdiagonalen von 2, 3; 4, 7; 5, 9; 6, 8 (Tab. I); 2) 4 Paare je aus $\mathfrak{g}_2^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_3^{(i)}$. Die 28 Zerlegungen teilen sich also in 2×6 und 16.

Für die 36 Zerlegungen in die Summe zweier gerader Characteristiken findet man nun folgendes.

1) 24 der Zerlegungen von 24 $[A]$ finden sich unter denjenigen 12 der 16 durch Auszeichnung des geraden Cyclus (a) entstandenen Paare, welche dem durch den ungeraden Cyclus (a) bestimmten Neunersysteme nicht angehören; die übrigen 12 Zerlegungen sind in den 12 Cyclen zweiter Art enthalten (Tab. II). Irgend eine Zerlegung wird, indem ihre beiden Characteristiken in zwei verschiedenen Cyclen (welche übrigens nie ein Paar der Tabelle ausmachen) vorkommen, durch 2 gerade Cyclen, also auch durch 2 Quadrupelpaare festgelegt. Hat man also einen Cyclus ausgezeichnet, welcher dem oben ausgeschlossenen Neunersysteme angehört, so werden 24 Zerlegungen durch ein System von 4 Quadrupelpaaren, die übrigen 12 durch ein zweites System von 12 Quadrupelpaaren bestimmt. Dies gilt aber für jeden der Cyclen des dem $[A]$ zugeordneten Neunersystems. Die 36 Zerlegungen ordnen sich also durch jede Wurzel unserer Hesseschen Gleichung 9ten Grades je in 24 und 12.

2) 2 der Zerlegungen von $[B]$ sind durch den Cyclus (a) gegeben:

$$[B] = (h)(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4) = (g\sigma_2\sigma_3)(g\rho_2\rho_3);$$

16 weitere Zerlegungen bestehen dann je aus denjenigen

beiden Characteristiken in jedem Paare, welche der Characteristik $(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4)$ zugeordnet sind; die übrigen 18 Zerlegungen befinden sich unter den 12 Cyclen zweiter Art, und zwar bildet jede ihrer Characteristiken, verbunden mit einer zweiten desselben Vierersystems, eine Zerlegung. Die 36 Zerlegungen zerfallen also in 2, 16, und 3×6.

§ 13.

Zugehörige Resolventen.

Die specielle Zweiteilungsgleichung für $p = 4$ wird den 120 ungeraden Characteristiken entsprechend im allgemeinen eine Gleichung 120ten Grades. Vermöge der Gruppe T von cyclischen Transformationen:

$$T\colon\ y' = y, \qquad y' = \varepsilon y, \qquad y' = \varepsilon^2 y,$$

welche das specielle algebraische Gebilde, das unseren Betrachtungen zu Grunde liegt, zulässt, wird diese Gleichung unmittelbar auf eine Gleichung 40ten Grades nebst einer reinen Gleichung 3ten Grades, die alle Cyclen zerlegt, reduciert. Adjungiert man nun eine Lösung der Gleichung 40ten Grades, so kommt man zunächst auf eine Gleichung 27ten Grades und auf eine Gleichung 12ten Grades. Erstere dieser beiden Gleichungen lässt sich aber dann ferner auf eine Hessesche Gleichung 9ten Grades und alsdann auf eine Gleichung 3ten Grades zurückführen. Hiermit ist die Auflösung der Gleichung 27ten Grades bewerkstelligt, und gleichzeitig auch noch die Auflösung der Gleichung 12ten Grades. Letztere reduciert sich mittelst einer Gleichung 4ten Grades auf eine Gleichung 3ten Grades, wobei die Gleichung 4ten Grades eben die Resolvente jener Hesseschen Gleichung 9ten Grades ist.

Den 136 geraden Characteristiken entsprechend hat das

allgemeine Problem auch eine Resolvente 136ten Grades. Hier ist zunächst vermöge T eine Wurzel der Gleichung bekannt und die resultierende Gleichung 135ten Grades reduciert sich auf eine Gleichung 45ten Grades nebst einer reinen Gleichung 3ten Grades.

Die Gleichung 40ten Grades und die Gleichung 45ten Grades sind gegenseitige Resolventen nach der §§ 9—11 gegebenen Zuordnung. Ferner kommt in unserem Problem noch eine Resolvente 27ten Grades (den 27 Quintupeln gerader Cyclen entsprechend) und eine zweite Resolvente 40ten Grades (von den Neunersystemen gerader Cyclen herrührend) vor, und zwar sind sämmtliche Gleichungen gegenseitige Resolventen.

Gruppe der Gleichung. Während die Gruppe der speciellen Zweiteilungsgleichung im allgemeinen Falle $p = 4$ an Zahl

$$Z = 2^7(2^8 - 1) \cdot 2^5(2^6 - 1) \cdot 2^3(2^4 - 1) \cdot 2(2^2 - 1)$$

ist, wird diese Gruppe im vorliegenden Falle wesentlich erniedrigt. Sei hier Z' die Anzahl der Substitutionen der Gruppe G. In dieser Gruppe ist zunächst T als ausgezeichnete Untergruppe enthalten, so dass die Gleichungen 40ten, 45ten .... Grades noch eine Gruppe Γ von $\frac{1}{3} Z'$ Substitutionen enthalten; durch Adjungieren einer Wurzel der Gleichung 40ten Grades, reduciert sich Γ auf $\frac{1}{40 \cdot 3} Z'$ Substitutionen, dann durch Lösung der Hesseschen und der Gleichung 3ten Grades auf $\frac{1}{40 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 6} Z' = 1$ Substitution, woraus

$$Z' = 40 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 6$$

oder, da die Gleichung 27ten Grades bekanntlich (als Gleichung der 27 Geraden einer Fläche 3ter Ordnung) eine Gruppe von $\frac{Z'}{3} = 27 \cdot 5! \cdot 16$ Substitutionen hat,

$$Z' = 3 . 27 . 5! . 16,$$

was mit der vorhergehenden Zahl übereinstimmt. Man schliesst daraus, dass es

$$\frac{Z}{Z'} = 136 . 64 . 35$$

Periodentransformationen vom Cyclus 3 für $p = 4$ giebt.

§ 14.
Geometrische Deutung.

Ich will zum Schlusse dieser Betrachtungen noch kurz erwähnen, welche geometrische Interpretation die Characteristikenprocesse zulassen, wodurch denn die Gruppierungssätze, welche darauf fussen, sich auch zugleich in geometrischer Form werden aussprechen lassen. Die einfachsten ungeraden Berührungscurven $X^{(1)}$ sind die 120 überall berührenden φ, welchen die 120 ungeraden Characteristiken beigelegt waren. Dagegen nehme ich als gerade Berührungscurven, den 135 geraden Characteristiken (ausser (h)) entsprechend, die 135 5fach unendlichen Schaaren $X^{(3)}$; der ausgezeichneten Characteristik (h) entspricht dagegen die einfach unendliche Schaar der doppelt gezählten Geraden durch den singulären Punkt der Grundcurve. Die $\Phi^{(2)}$ bilden eine 8fach unendliche Schaar.

Man hat zunächst 40 Cyclen von je 3 3punktig berührenden Curven φ. Man nehme nun Curvencyclen

$$X^{(1)}_{\alpha_0}, \quad X^{(1)}_{\alpha_1}, \quad X^{(1)}_{\alpha_2}; \qquad (\alpha)$$
$$X^{(1)}_{\beta_0}, \quad X^{(1)}_{\beta_1}, \quad X^{(1)}_{\beta_2}, \qquad (\beta)$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ungerade Cyclen sind. Geometrisch sagt die Combination (c) § 9 der beiden Cyclen folgendes aus: Man betrachte je die 9 Berührungspunkte von folgenden 9 Systemen Σ von je 3 Berührungscurven: irgend ein System bestehe aus $X^{(1)}_h$, einer Curve von (α) und einer Curve von (β); je nachdem nun ein solches System von 9

Punkten auf einer $\Phi^{(2)}$ liegt oder nicht, kommt man durch die $\Phi^{(2)}$ auf eine neue $X^{(1)}$, oder aber das System bildet eine der 135 $X^{(3)}$. Es entstehen dabei nach (c), (c') folgende 2 Möglichkeiten: in dem System Σ von 9 Curven kommt es 6 mal vor, dass eine $\Phi^{(2)}$ existiert, oder gar nicht. Im ersten Falle sind die beiden Curvencyclen erster Art gegen einander, im zweiten Falle zweiter Art. Im ersten Falle sind ferner je die Curven der beiden Cyclen auch einzeln einander zugeordnet, indem durch die 9 Berührungspunkte von $X_h^{(1)}$ und 2 zugeordneten Curven keine $\Phi^{(2}$ geht. Im zweiten Falle findet keine Zuordnung der einzelnen Curven gegen einander statt. Man kann nun den Satz aussprechen: Nimmt man irgend einen Curvencyclus (A) heraus, so teilen sich die übrigen 39 in Bezug auf denselben in 2 Arten, nämlich in 27 erster Art und 12 zweiter Art. Die 27 erster Art zerfallen in 9 Tripel einer Hesseschen Gleichung; die 12 in 4 Tripel der Resolvente derselben. Ein Tripel erster Art hat die Eigenschaft, dass, wenn eine $\Phi^{(2)}$, welche durch die 3 Berührungspunkte von $X_h^{(1)}$, von irgend einer der 3 Curven (A) und von einer Curve eines der 3 Cyclen geht, die Grundcurve noch in den 3 Berührungspunkten einer anderen zu den in Betracht kommenden 3 Cyclen gehörigen Curve trifft. Ein solches Tripel ordnet sich mit (A) zu einem Quadrupel zusammen, etc., etc.

Um jetzt auch die Combination (c) geometrisch zu deuten, nehme man Curvencyclen

$$X_{a_0}^{(3)},\quad X_{a_1}^{(3)},\quad X_{a_2}^{(3)} \qquad (a)$$

$$X_{b_0}^{(3)},\quad X_{b_1}^{(3)},\quad X_{b_2}^{(3)} \qquad (b)$$

und betrachte man je die 21 Berührungspunkte von folgenden 9 Systemen S von je 3 Berührungscurven: irgend ein System bestehe aus $X_h^{(1)}$, einer Curve von (a) und einer Curve von (b); je nachdem nun ein solches System von 21 Punkten auf einer $\Phi^{(4)}$ liegt oder nicht, kommt man durch

die $\Phi^{(4)}$ auf eine $X^{(1)}$, oder aber das System bildet eine der 129 übrigen $X^{(3)}$. Es entstehen dabei nach (c), (c') § 11 folgende 2 Möglichkeiten: in dem System S von 9 Curven kommt es 6 mal vor, dass eine $\Phi^{(1)}$ existiert, oder gar nicht. Im ersten Falle sind die beiden Curvencyclen erster Art gegen einander, im zweiten Falle zweiter Art. Auch hier sind hierdurch die Curven der beiden Cyclen im ersten Falle wieder einzeln einander zugeordnet, im zweiten Falle nicht.

Dementsprechend hat man nun folgende geometrische Sätze. Bei Auszeichnung eines der 45 geraden Curvencyclen (a) § 11 zerfallen die übrigen in 32 erster und 12 zweiter Art; erstere ordnen sich zu 16 conjugierten Paaren, letztere zu 3 Vierersystemen. (a) verbunden mit einem der Vierersysteme ordnet sich zu einem Quintupel von Cyclen zweiter Art zusammen, deren es 27 giebt, etc., etc. Man hat ferner nach § 11 die Trieder, Doppeltrieder, Neunersysteme, u. s. w., und kann für dieselben aus der Characteristikengruppierung mit Leichtigkeit alle diejenigen Sätze ableiten, welche für die Gruppierung der geraden Linien einer Fläche 3ter Ordnung entwickelt worden sind. Ich will aber statt dessen nur noch einen Satz über die 2fach unendliche Schaar von Berührungscurven $X^{(2)}$ aussprechen. Von den eigentlichen Systemen von $X^{(2)}$ giebt es 120 und 135. Jedem dieser Systeme gehören überhaupt 28 Paare von ungeraden $X^{(1)}$ an. Bei jedem der 120 Systeme besteht dieses Paar einmal und nur einmal aus zwei Berührungscurven $X^{(1)}$, welche ein und demselben Curvencyclus angehören, während die 27 übrigen Paare je zu 3 aus den 9 Tripeln genommen sind, welche gegen jenen Cyclus erster Art sind. Bei den 135 Systemen besteht keines der 28 Paare aus 2 Curven eines Cyclus; vielmehr teilen sich hier die 28 Paare in 2×6 und 16. Das Genauere über diese Zerlegungen in Paare von geraden $X^{(3)}$ ergiebt § 12.

TABELLE I.

Die 40 Cyclen ungerader Characteristiken bei Auszeichnung von
$(g\tau_1)(g\tau_1\sigma_2\rho_3)(g\tau_1\tau_3\tau_4)$.

$(g\tau_1\tau_2\tau_3)(g\sigma_2\rho_3\tau_4)(g\tau_2)$ $(g\tau_2\tau_3\tau_4)(g\tau_1\rho_2\sigma_3)(g\tau_3)$ $(g\tau_4)(g\rho_2\sigma_3\tau_4)(g\tau_1\tau_2\tau_4)$	1
$(g\rho_1\tau_4)(g\tau_1\tau_2\sigma_3\tau_4)(g\rho_1\rho_2\tau_4)$ $(g\rho_1\rho_2\tau_3)(g\rho_1\sigma_2\rho_3\tau_4)(g\tau_1\rho_2)$ $(g\tau_1\rho_2\tau_3\tau_4)(g\rho_1\tau_2\sigma_3)(g\rho_1\tau_3)$	2
$(g\rho_1\tau_2\tau_3\tau_4)(g\tau_2\sigma_3)(g\sigma_1\sigma_2\tau_3)$ $(g\sigma_1\sigma_2\tau_4)(g\rho_1\rho_2\sigma_3\tau_4)(g\rho_2\tau_4)$ $(g\rho_2\tau_3)(g\sigma_1\rho_3\tau_4)(g\rho_1\tau_2)$	3
$(g\tau_1\rho_2\sigma_3\sigma_4)(g\rho_1\rho_2\tau_3\rho_4)(g\rho_1\sigma_2\tau_3)$ $(g\rho_1\sigma_2\tau_4)(g\tau_1\tau_2\tau_3\sigma_4)(g\rho_1\tau_2\rho_3\sigma_4)$ $(g\rho_1\tau_2\sigma_3\rho_4)(g\rho_1\rho_3\tau_4)(g\tau_1\rho_2\rho_3\rho_4)$	4
$(g\tau_1\rho_2\sigma_3\rho_4)(g\rho_3\tau_4)(g\tau_2\rho_3\rho_4)$ $(g\tau_2\sigma_3\sigma_4)(g\tau_1\tau_2\tau_3\rho_4)(g\sigma_2\tau_3)$ $(g\sigma_2\tau_4)(g\rho_2\tau_3\sigma_4)(g\tau_1\rho_2\rho_3\sigma_4)$	5
$(g\sigma_1\tau_4)(g\rho_1\rho_2\tau_3\sigma_4)(g\tau_2\rho_3\sigma_4)$ $(g\tau_2\sigma_3\rho_4)(g\sigma_1\sigma_2\rho_3\tau_4)(g\rho_1\tau_2\rho_3\rho_4)$ $(g\rho_1\tau_2\sigma_3\sigma_4)(g\rho_2\tau_3\rho_4)(g\sigma_1\tau_3)$	6
$(g\tau_1\sigma_2\rho_3\sigma_4)(g\sigma_1\rho_2\tau_3\sigma_4)(g\sigma_1\rho_2\tau_4)$ $(g\sigma_1\rho_2\tau_3)(g\tau_1\sigma_4)(g\sigma_1\tau_2\rho_3\rho_4)$ $(g\sigma_1\tau_2\sigma_3\sigma_4)(g\sigma_1\tau_2\sigma_3)(g\tau_1\sigma_2\sigma_3\rho_4)$	7
$(g\sigma_1\tau_2\tau_3\tau_4)(g\sigma_1\rho_2\tau_3\rho_4)(g\tau_1\sigma_3\rho_4)$ $(g\tau_1\rho_3\sigma_4)(g\sigma_1\rho_2\sigma_3\tau_4)(g\sigma_1\tau_2\rho_3\sigma_4)$ $(g\sigma_1\tau_2\sigma_3\rho_4)(g\tau_1\sigma_2\sigma_4)(g\sigma_1\tau_2)$	8
$(g\tau_1\sigma_2\rho_3\rho_4)(g\tau_1\rho_3)(g\tau_1\sigma_3\sigma_4)$ $(g\tau_1\rho_3\rho_4)(g\tau_1\rho_4)(g\tau_1\sigma_2\tau_3\tau_4)$ $(g\tau_1\sigma_2)(g\tau_1\sigma_2\rho_4)(g\tau_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$	9

$$\left.\begin{array}{l}(g\sigma_1\tau_2\sigma_4)\,(g\tau_1\sigma_2\sigma_3)\,(g\sigma_1\tau_2\rho_4)\\ (g\tau_1\sigma_3)\,(g\sigma_1\tau_2\rho_3)\,(g\sigma_1\rho_2\rho_3\tau_4)\\ (g\sigma_3\tau_4)\,(g\rho_1\sigma_3\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\sigma_3\tau_4)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\,2\,3 = (\mathfrak{g}_1)\\ 4\,5\,6 = (\mathfrak{g}_2)\\ 7\,8\,9 = (\mathfrak{g}_3)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\rho_1\tau_2\rho_4)\,(g\rho_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_1\tau_3\rho_4)\\ (g\tau_2\sigma_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\tau_3\rho_4)\,(g\rho_1\tau_2\rho_3)\\ (g\tau_3\sigma_4)\,(g\rho_1\sigma_2\tau_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\sigma_3\tau_4)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\,4\,7 = (\mathfrak{g}_1')\\ 2\,5\,8 = (\mathfrak{g}_2')\\ 3\,6\,9 = (\mathfrak{g}_3')\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\sigma_1\tau_3\sigma_4)\,(g\sigma_2\sigma_3\tau_4)\,(g\rho_1\tau_3\sigma_4)\\ (g\tau_2\rho_4)\,(g\tau_1\tau_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_2\tau_3\rho_4)\\ (g\tau_2\rho_3)\,(g\tau_1\rho_2\sigma_4)\,(g\tau_3\rho_4)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\,5\,9 = (\mathfrak{g}_1'')\\ 2\,6\,7 = (\mathfrak{g}_2'')\\ 3\,4\,8 = (\mathfrak{g}_3'')\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\tau_1\rho_2\rho_3)\,(g\rho_1\tau_2\sigma_4)\,(g\rho_1\tau_3\rho_4)\\ (g\sigma_2\tau_3\sigma_4)\,(g\rho_1\sigma_2\sigma_3\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\tau_3\sigma_4)\\ (g\rho_1\sigma_2\tau_3\rho_4)\,(g\tau_1\rho_2\rho_4)\,(g\rho_1\rho_2\rho_3\tau_4)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\,6\,8 = (\mathfrak{g}_1''')\\ 2\,4\,9 = (\mathfrak{g}_2''')\\ 3\,5\,7 = (\mathfrak{g}_3''')\end{array}$$

TABELLE II.

Die 45 Cyclen gerader Characteristiken bei Auszeichnung von

$$(g\tau_1\rho_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_2\sigma_3)\,(g\rho_2\rho_3).$$

$(g\rho_1)(g\sigma_1\sigma_2\rho_4)(g\sigma_3\sigma_4)$ $(g\rho_1\tau_2\tau_3)(g\rho_1\sigma_2\sigma_4)(g\tau_1\tau_2\rho_3\rho_4)$	1
$(g\sigma_4)(g\rho_3)(g\tau_1\tau_2\sigma_3\rho_4)$ $(g\tau_2\tau_3\sigma_4)(g\tau_1\rho_2\tau_4)(g\rho_3\sigma_4)$	2
$(g\sigma_1\tau_2\tau_3)(g\tau_1\rho_3\tau_4)(g\sigma_1\rho_2)$ $(g\sigma_1)(g\rho_3)(g\rho_1\sigma_2\tau_3\tau_4)$	3
$(g\rho_4)(g\rho_1\sigma_3\sigma_4)(g\sigma_1\sigma_2)$ $(g\tau_2\tau_3\rho_4)(g\sigma_1\sigma_3\rho_4)(g\rho_1\rho_2\tau_3\tau_4)$	4
$(g\tau_1\tau_2\sigma_4)(g\sigma_3)(g\rho_2\rho_4)$ $(g\tau_1\tau_3\sigma_4)(g\tau_1\sigma_3\tau_4)(g\tau_1\sigma_2\tau_3\sigma_4)$	5
$(g\sigma_1\tau_3\tau_4)(g\sigma_2)(g\rho_1\rho_3)$ $(g\sigma_1\tau_2\tau_4)(g\tau_1\sigma_2\tau_4)(g\sigma_1\tau_2\sigma_3\tau_4)$	6
$(g\sigma_1\rho_2\sigma_3)(g\tau_1\sigma_2\tau_3)(g\sigma_1\rho_2\tau_3\tau_4)$ $(g\sigma_1\sigma_2\rho_3)(g\sigma_2\tau_3\tau_4)(g\rho_1\sigma_2)$	7
$(g\tau_1\tau_3\rho_4)(g\sigma_1\rho_2\rho_4)(g\sigma_1\tau_2\rho_3\tau_4)$ $(g\tau_1\tau_2\rho_4)(g\rho_1\rho_3\sigma_4)(g\rho_1\sigma_3)$	8
$(g\sigma_1\rho_2\rho_3)(g\sigma_1\rho_2\sigma_4)(g\tau_1\sigma_2\tau_3\rho_4)$ $(g\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(g\rho_1\rho_2\rho_4)(g\rho_2\sigma_4)$	9
$(g\rho_2\rho_3\sigma_4)(g\sigma_1\rho_3\sigma_4)(g\rho_1\tau_2\sigma_3\tau_4)$ $(g\sigma_2\sigma_3\sigma_4)(g\rho_1\rho_3\rho_4)(g\sigma_1\rho_3)$	10
$(g\rho_1\tau_3\tau_4)(g\sigma_1\rho_3\rho_4)(g\sigma_2\rho_4)$ $(g\rho_1\tau_2\tau_4)(g\rho_1\rho_3\sigma_4)(g\tau_1\rho_2\tau_3\sigma_4)$	11
$(g\sigma_2\rho_3\sigma_4)(g\tau_2\sigma_3\tau_4)(g\tau_1\tau_2\rho_3\sigma_4)$ $(g\rho_2\sigma_3\sigma_4)(g\tau_1\tau_2\sigma_3)(g\sigma_3\rho_4)$	12

$$\left.\begin{array}{l}(g\sigma_2\rho_3\rho_4)\,(g\rho_1\sigma_2\rho_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\tau_3\tau_4)\\(g\rho_2\sigma_3\rho_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\sigma_4)\,(g\rho_1\rho_2)\end{array}\right\}\ 13$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\rho_1\sigma_2\rho_3)\,(g\sigma_1\sigma_3\sigma_4)\,(g\rho_3\rho_4)\\(g\rho_1\rho_2\sigma_3)\,(g\rho_1\sigma_3\rho_4)\,(g\tau_1\tau_2\sigma_3\sigma_4)\end{array}\right\}\ 14$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\rho_1\rho_2\rho_3)\,(g\tau_2\rho_3\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_3)\\(g\rho_1\sigma_2\sigma_3)\,(g\tau_1\tau_2\rho_3)\,(g\rho_1\tau_2\rho_3\tau_4)\end{array}\right\}\ 15$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\sigma_2\sigma_3\rho_4)\,(g\rho_2\tau_3\tau_4)\,(g\tau_1\rho_2\tau_3\rho_4)\\(g\rho_2\rho_3\rho_4)\,(g\tau_1\rho_2\tau_3)\,(g\sigma_2\sigma_4)\end{array}\right\}\ 16$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\rho_1\sigma_4)\,(g\tau_1\tau_2)\,(g\rho_1\rho_2\sigma_3\rho_4)\\(g\rho_1\tau_2\tau_3\sigma_4)\,(g\tau_2\tau_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\rho_3\sigma_4)\\(g\tau_1\tau_3)\,(g\sigma_1\rho_2\sigma_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\tau_2\tau_3\rho_4)\\(g\rho_1\sigma_2\rho_3\rho_4)\,(g\sigma_1\rho_4)\,(g\tau_3\tau_4)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(g\rho_2\sigma_3)\,(g\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rho_4)\,(g\rho_1\rho_2\sigma_3\sigma_4)\\(g\sigma_2\rho_3)\,(g\rho_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\rho_3\rho_4)\\(g\sigma_1\rho_2\rho_3\rho_4)\,(g\sigma_1\rho_2\sigma_3\rho_4)\,(g\tau_1\sigma_2\rho_3\tau_4)\\(g\rho_1\rho_2\rho_3\sigma_4)\,(g\rho_1\sigma_2\rho_3\sigma_4)\,(g\tau_1\rho_2\sigma_3\tau_4)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(g)\,(g\rho_1\rho_4)\,(g\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\\(g\sigma_1\sigma_4)\,(g\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)\,(g\tau_2\tau_3)\\(g\tau_1\tau_4)\,(g\sigma_1\tau_2\tau_3\sigma_4)\,(g\sigma_1\rho_2\rho_3\sigma_4)\\(g\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)\,(g\rho_1\tau_2\tau_3\rho_4)\,(g\rho_1\sigma_2\sigma_3\rho_4)\end{array}\right\}$$